

CORRECTION DU DEVOIR N°06

Exercice 1 :

Attention les trois parties sont liées.

Partie I

Soit g la fonction définie par : $g(x) = x - \ln(x)$

1- Déterminer Dg

g existe $\Leftrightarrow x > 0$ donc $Dg = \mathbb{R}^*$.

2- Étudier les variations de g et dresser le tableau de variation de g sans les limites.

g est dérivable sur Dg comme somme de fonctions dérivables

$$\forall x \in Dg, g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$\forall x \in Dg, x > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $x - 1$

signe de $x - 1$: $\begin{array}{c} - \quad \oplus \quad + \\ \hline 1 \end{array} \rightarrow$

Conclusion : g est décroissante sur $]0,1[$ et est croissante sur $[1, +\infty[$

x	0	1	$+\infty$	
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$				

$$g(1) = 1 - \ln(1) = 1 - 0 = 1$$

3- Donner le minimum de g sur Dg

Le minimum de g est 1

4- En déduire le signe de $g(x)$ sur Dg .

d'après le tableau de variation $\forall x \in Dg, g(x) \geq 1 > 0$.

Conclusion : g est positive sur Dg

Partie II

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2}{2} + x - x \ln(x) + \frac{3}{2}$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative

1- Déterminer Df

f existe $\Leftrightarrow x > 0$ donc $Df = \mathbb{R}^*$.

2- Déterminer les limites aux bornes de Df

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + x - x \ln(x) + \frac{3}{2}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{3}{2}} \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{2} \right) = \frac{3}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 \text{ limite de référence} \end{cases}$$

en $+\infty$, on se retrouve avec une forme indéterminée du type " $(+\infty)+(-\infty)$ " donc on factorise par le terme prépondérant ici x^2

$$f(x) = x^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{x^2} - \frac{x \ln(x)}{x^2} + \frac{\frac{3}{2}}{x^2} \right) = x^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x} + \frac{3}{2x^2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x} + \frac{3}{2x^2} \right) = \frac{1}{2} \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ croissances comparées} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2x^2} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x} + \frac{3}{2x^2} \right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Étude des branches infinies

3- Calculer $f'(x)$ et l'écrire en fonction de $g(x)$

f est dérivable sur Df comme somme de fonctions dérivables

$$\forall x \in Df, f'(x) = 2 \times \frac{x}{2} + 1 - \left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} \right) + 0 = x + 1 - \ln(x) - 1 = x - \ln(x) = g(x)$$

Conclusion : $\forall x \in Df, f'(x) = g(x)$

4- En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variation.

$\forall x \in Df, f'(x) = g(x)$ et g est positive sur \mathbb{R}_+^* d'après la question I.4

donc $\forall x \in Df, f'(x) > 0$

et par suite f est croissante

Conclusion : f est croissante sur Df .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$

5- Étudier la convexité de f

$\forall x \in Df, f'(x) = x - \ln(x) = g(x)$

f' est dérivable sur Df comme somme de fonctions dérivables

$\forall x \in Df, f''(x) = g'(x)$. Le signe a été étudié à la question I.2

x	0	1	$+\infty$
$f''(x) = g'(x)$		0	+
convexité	f est concave	point d'inflexion (1 ; 3)	f est convexe

$f(1) = \frac{1}{2} + 1 - 0 + \frac{3}{2} = \frac{1+2+3}{2} = \frac{6}{2} = 3.$

6- Déterminer l'équation de la tangente T à \mathcal{C} au point A d'abscisse 1

Une équation cartésienne de la tangente T à \mathcal{C} au point d'abscisse 1 est donnée par

$T: y = f'(1)(x-1) + f(1)$ avec $f'(1) = g(1) = 1$ et $f(1) = 3$

Conclusion $T: y = 1(x-1) + 3 = x + 2.$

7- Étudier position relative de \mathcal{C} par rapport à T

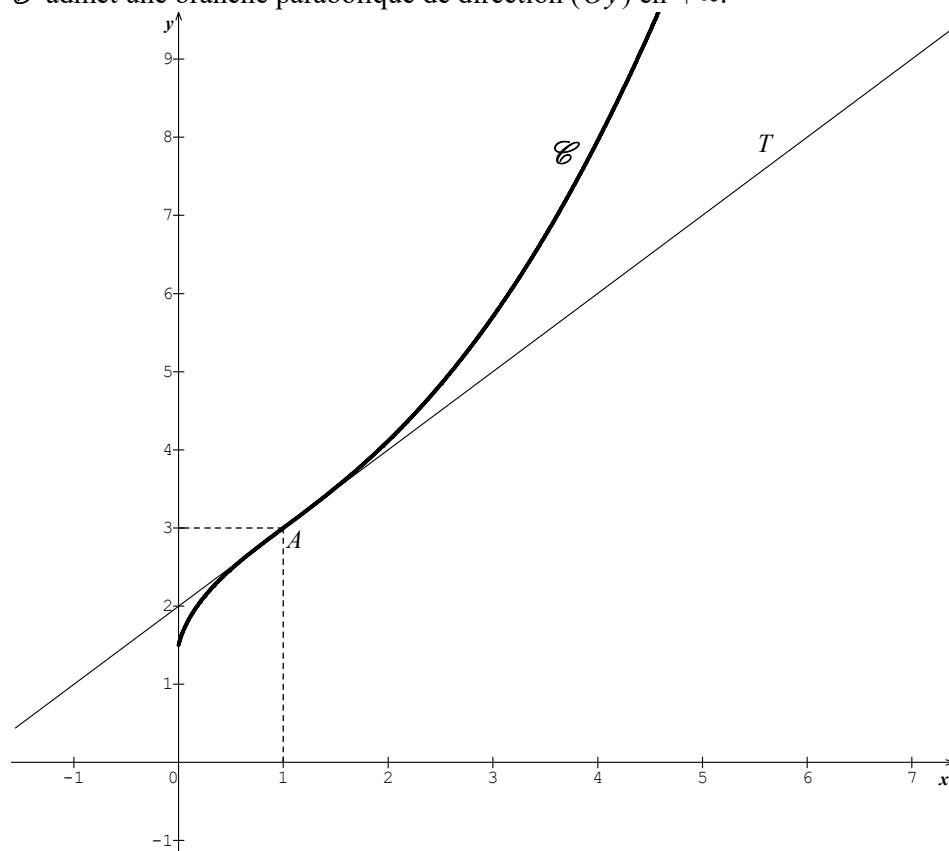
Si $x \leq 1$, f est concave donc \mathcal{C} est en dessous de T

Si $x \geq 1$, f est convexe donc \mathcal{C} est au-dessus de T

Au point d'inflexion, \mathcal{C} coupe sa tangente.

8- Construire \mathcal{C} et T

\mathcal{C} admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.



Remarque: A est un point d'inflexion donc la courbe \mathcal{C} traverse sa tangente en A

Partie III

Une entreprise produit et commercialise un article. Sa capacité de production quotidienne est limitée à 5 milliers d'articles.

La fonction f modélise le coût total de production exprimé en milliers d'euros, où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués.

On note $C(x)$ le coût moyen de production exprimé en euros, par article fabriqué.

C est la fonction définie par $C(x) = \frac{f(x)}{x}$

1- Déterminer D_C ainsi que l'expression de C sur D_C

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + x - x \ln(x) + \frac{3}{2}$$

$$C(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{x}{2} + 1 - \ln(x) + \frac{3}{2x}$$

C existe $\Leftrightarrow x > 0$ et $x \neq 0$ et la capacité de production quotidienne est limitée à 5 milliers d'articles donc $x \leq 5$

Conclusion : $D_C =]0,5]$ et $\forall x \in D_C, C(x) = \frac{x}{2} + 1 - \ln(x) + \frac{3}{2x}$

2- Étudier les variations de C sur D_C

$$\forall x \in D_C, C(x) = \frac{x}{2} + 1 - \ln(x) + \frac{3}{2} \times \frac{1}{x}$$

C est dérivable sur D_C comme somme de fonctions dérivables

$$\forall x \in D_C, C'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{3}{2} \times \frac{-1}{x^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{2x^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{2x^2}$$

$\forall x \in D_C, x > 0$ donc $x+1 > 0$ et $2x^2 > 0$ et par suite $C'(x)$ est du signe de $x-3$

signe de $x-3$: $\begin{array}{c} - & & + \\ 0 & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & 5 \\ & & \oplus & & & & \\ & & 3 & & & & \end{array}$

Conclusion : C est décroissante sur $]0,3]$ et est croissante sur $[3, 5]$.

3- Dresser le tableau de variation de C . On donne $\lim_{x \rightarrow 0^+} C(x) = +\infty$

x	0	3	5		
$C'(x)$		-	0	+	
$C(x)$	$+\infty$		$C(3)$		$C(5)$

$$C(3) = \frac{3}{2} + 1 - \ln(3) + \frac{3}{23} = \frac{3}{2} + 1 - \ln(3) + \frac{1}{2} = 3 - \ln(3)$$

$$C(5) = \frac{5}{2} + 1 - \ln(5) + \frac{3}{10} = \frac{38}{10} - \ln(5)$$

4- Quel est le prix de vente, à 0,1 euro près, d'un article en dessous duquel l'entreprise est certaine de ne pas faire de bénéfice ?

Le coût moyen minimal est $C(3) = 3 - \ln(3) \approx 1,9$

Conclusion : Le prix de vente, à 0,1 euro près, d'un article en dessous duquel l'entreprise est certaine de ne pas faire de bénéfice est 1,9 €.