**LYCEE JEAN PERRIN** **2025-2026**

**EC 1**

# CORRECTION DU DEVOIR N°07

***Exercice 1 :***

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x+3}{8-x^3}$ et $g$ la fonction définie par $g(x) = 2x^3+9x^2+8$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

## Partie A : Étude de $g$

**1-** Déterminer l'ensemble de définition de $g$

$\boldsymbol{Dg = \mathbb{R}}$

**2-** Étudier les variations de $g$.

$g$ est dérivable sur $Dg$ comme fonction polynôme.

$\forall x \in Dg,\ g'(x) = 6x^2 + 18x = 6x(x+3)$

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $6x(x+3)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**conclusion : $g$ est croissante sur $]-\infty\,;-3]$ et sur $[0\,;+\infty[$**

**$g$ est décroissante sur $[-3\,;0]$**

**3-** Déterminer les limites de $g$ aux bornes de son ensemble de définition.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$$

**4-** Dresser le tableau de variations de $g$.

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $-3$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | | $+$ | | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $35$ | ↘ | $8$ | ↗ | $+\infty$ |

$g(-3) = -54+81+8 = 35$ $g(0) = 0+0+8 = 8$

**5-** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$

- **Étude sur $[-3\,;+\infty[$**

$\forall x \in [-3\,;+\infty[$, $g(x) \geq 8 > 0$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $[-3\,;+\infty[$

- **Étude sur $]-\infty\,;-3]$**

$g$ est continue sur $]-\infty\,,3]$ car dérivable

$g$ est strictement croissante sur $]-\infty\,,-3]$ d'après le tableau de variation

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $g(-3) = 35$

donc $g$ réalise une bijection de $]-\infty\,,-3]$ sur $g(]-\infty\,,-3]) = ]-\infty\,,35]$

De plus $0 \in ]-\infty\,,35]$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in ]-\infty\,,-3]$

**Conclusion : l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$**

**6-** <u>En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$</u>

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |

**<u>Partie B :</u> Étude *f***

**1-** <u>Déterminer l'ensemble de définition de $f$</u>

$f$ n'existe pas $\Leftrightarrow 8 - x^3 = 0$

Résolvons $8 - x^3 = 0$, 2 est une racine évidente car $8 - 2^3 = 0$

Donc on factorise par la méthode de Horner

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $-1$ | 0 | 0 | 8 |
| 2 | | $-2$ | $-4$ | $-8$ |
| | $-1$ | $-2$ | $-4$ | 0 |

donc $8 - x^3 = (x-2)(-x^2 - 2x + 4)$

$8 - x^3 = 0$

$x - 2 = 0$ ou $-x^2 - 2x + 4 = 0$

$x = 2$ ou $\Delta = (-2)^2 - 4\times(-1)(-4) = 4 - 16 = -12 < 0$

Donc l'équation n'admet pas de solution

**<u>Conclusion</u> : $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$**

**2-** <u>Déterminer les limites</u> $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ <u>Que peut-on en déduire ?</u>

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{-x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{x^2} = 0$$

**<u>Conclusion :</u> la droite $D$ d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.**

L'étude de la position sera faite à la question 4

**3-** <u>Déterminer les limites</u> $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$. <u>Que peut-on en déduire ?</u>

<u>Étude du signe du dénominateur</u>

| $x$ | $-\infty$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x - 2$ | | $-$ | **0** | $+$ | |
| $-x^2 - 2x + 4$ | | $-$ | | $-$ | |
| $8 - x^3$ | | $+$ | **0** | $-$ | |

Car $\Delta < 0$ donc signe de $a$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty}$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} (x+3) = 5 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} (8 - x^3) = 0^- \end{cases}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty}$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} (x+3) = 5 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} (8 - x^3) = 0^+ \end{cases}$

**donc la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}$**

**4-** <u>Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et de la droite $D$ d'équation $y = 0$</u>

Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et de la droite $D$ revient à étudier le signe de $f(x) - y_D$

$$f(x) - y_D = f(x) - 0 = \frac{x+3}{8-x^3} = \frac{x+3}{(x-2)(-x^2-2x-4)}$$

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+3$ | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | |
| $x-2$ | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $-x^2-2x-4$ | $-$ | \| | $-$ | \| | $-$ | |
| $f(x) - y_D$ | $-$ | $0$ | $+$ | \|\| | $-$ | |
| Position | $\mathscr{C}$ est en dessous de $D$ | $\mathscr{C}$ coupe $D$ en $(-3,0)$ | $\mathscr{C}$ est au-dessus de $D$ | \|\| | $\mathscr{C}$ est en dessous de $D$ | |

**5-** <u>Montrer que $\forall\, x \in Df$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(8-x^3)^2}$</u>

$f$ est dérivable sur chaque intervalle de $Df$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas .

$$\forall x \in Df,\ f'(x) = \frac{1(8-x^3) + 3x^2(x+3)}{(8-x^3)^2} = \frac{2x^3 + 9x^2 + 8}{(8-x^3)^2} = \frac{g(x)}{(8-x^3)^2}$$

**6-** <u>Étudier les variations de $f$.</u>

$\forall x \in Df,\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{(8-x^3)^2}$

Or $\forall\, x \in Df$ , $(8-x^3)^2 > 0$

donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ (voir question A6)

**<u>Conclusion</u> : *f* est croissante sur [α ;2[ et sur ]2 ;+∞[ car 2 est valeur interdite**

***f* est décroissante sur ]−∞ ;α]**

**7-** <u>Dresser le tableau de variations de $f$.</u>

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \|\| | $+$ | |
| $g(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $f(\alpha)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ \|\| $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ |

**8-** <u>Déterminer l'équation de la tangente $T$ à $\mathscr{C}$ au point $A$ d'abscisse 0, puis vous étudierez la position relative de $\mathscr{C}$ et $T$.</u>

Une équation cartésienne de la tangente $T$ à $\mathscr{C}$ au point $A$ d'abscisse 0 est donnée par

$T:\ y = f'(0)\,(x-0) + f(0)$ avec $f'(0) = \dfrac{g(0)}{(8)^2} = \dfrac{8}{64} = \dfrac{1}{8}$ et $f(0) = \dfrac{3}{8}$

$$\boxed{\textbf{donc } T: \; y = \frac{1}{8}(x-0)+\frac{3}{8} = \frac{1}{8}x+\frac{3}{8}}$$

Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et $T$ revient à étudier le signe de $f(x) - y_T$

$$f(x)-y_T = \frac{x+3}{8-x^3} - \frac{x+3}{8} = \frac{8x+24-(x-3)(8-x^3)}{8(8-x^3)}$$

$$= \frac{8x+24-(8x-x^4+24-3x^3)}{8(8-x^3)} = \frac{x^4+3x^3}{8(8-x^3)} = \frac{x^3\,(x+3)}{8(8-x^3)} = \frac{x^3\,(x+3)}{8(x-2)(-x^2-2x-4)}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^3$ | | $-$ | \| | $-$ | **0** | $+$ | \| | $+$ | |
| $x+3$ | | $-$ | **0** | $+$ | \| | $+$ | \| | $+$ | |
| $x-2$ | | $-$ | \| | $-$ | \| | $-$ | **0** | $+$ | |
| $-x^2-2x-4$ | | $-$ | \| | $-$ | \| | $-$ | \| | $-$ | |
| $h(x)$ | | $+$ | **0** | $-$ | **0** | $+$ | \|\| | $-$ | |
| Position | | $\mathscr{C}$ est au-dessus de $T$ | $\mathscr{C}$ rencontre T en (-3,0) | $\mathscr{C}$ est en dessous de $T$ | $\mathscr{C}$ rencontre T $(0\,,\frac{3}{8})$ | $\mathscr{C}$ est au-dessus de $T$ | \|\| | $\mathscr{C}$ est en dessous de $T$ | |

***Exercice 2 :***

Un producteur de fruits rouges propose en vente directe des framboises, des groseilles et des myrtilles.

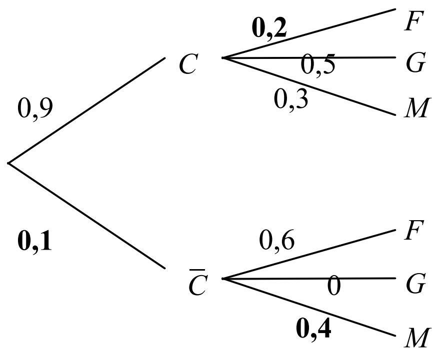
Le client peut acheter, soit des barquettes de fruits à déguster, soit des barquettes de fruits à confiture. Le producteur a remarqué que, parmi ses clients, 9 sur 10 achètent une barquette de fruits à confiture.

Lorsqu'un client achète une barquette de fruits à confiture, la probabilité qu'il demande une barquette de myrtilles est de 0,3 et la probabilité qu'il demande une barquette de groseilles est de 0,5.

Lorsqu'un client achète une barquette de fruits à déguster, il ne demande jamais des groseilles et demande des framboises dans 60% des cas.

Un client achète une barquette. On notera :
- $C$ l'évènement « le client achète une barquette de fruits à confiture »,
- $F$ l'évènement « le client demande des framboises »,
- $G$ l'évènement « le client demande des groseilles »,
- $M$ l'évènement « le client demande des myrtilles ».

**1-** Calculer la probabilité que le client demande des framboises sachant qu'il achète une barquette de fruits à confiture.




$P_C(F) = 1 - P_C\ (G) -\ P_C\ (M) = 1 - 0{,}5 - 0{,}3 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

**Conclusion : la probabilité que le client demande des framboises sachant qu'il achète une barquette de fruits à confiture est 0,2.**

**2-** Montrer que la probabilité que le client achète une barquette de framboises est égale à 0,24.

$C$ et $\overline{C}$ forment un système complet d'événement donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$P(F) = P(F \cap C) + P(F \cap \overline{C}\ )$

$= P(C)\ P_C\ (F) + P(\ \overline{C}\ )\ P_{\overline{C}}\ (F)$

$= 0{,}9 \times 0{,}2 + 0{,}1 \times 0{,}6 = 0{,}18 + 0{,}06 = 0{,}24$

**Conclusion : la probabilité que le client achète une barquette de framboises est égale à 0,24.**

**3-** Le client achète une barquette de framboises. Quelle est la probabilité que ce soit une barquette de fruits à confiture ?

$P(F) = 0{,}24 \neq 0$

Donc $P_F(C) = \dfrac{P(F \cap C)}{P(F)} = \dfrac{0{,}18}{0{,}24} = \dfrac{18}{24} = 0{,}75$

**Conclusion : la probabilité que le client achète une barquette de fruits à confiture sachant qu'il a achète une barquette de framboises est égale à 0,75**

***Exercice 3 :***

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$

et $(v_n)$ la suite définie par $\forall\ n \in \mathbb{N}\ ,\ v_n = u_n - 2$

**1-** Calculer $u_1$, $u_2$, $v_0$ et $v_1$

$$u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 1 = \frac{5}{4} + 1 = \frac{9}{4}$$

$$v_0 = u_0 - 2 = 3 - 2 = 1$$

$$v_1 = u_1 - 2 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$$

**2-** Écrire un programme `Python` qui demande $n$ à l'utilisateur et qui affiche $u_n$ et $v_n$

```
n=int(input('n='))
u=3 #uo
v=1 # v0
for k in range (1,n+1):
    u=1/2*u+1
    v=u-2
print('u=',u)
print('v=',v)
```

**3-** Écrire un programme `Python` qui demande $n$ à l'utilisateur et qui affiche $S = \sum_{k=0}^{n} u_k$

```
n=int(input('n='))
u=3 #uo
S=u
for k in range (1,n+1):
    u=1/2*u+1
    S=S+u
print('S=',S)
```

**4-** Montrer que la suite $(v_n)$ est géométrique

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{n+1} - 2$

$= \frac{1}{2}u_n + 1$ [redacted] $2$

$= \frac{1}{2}u_n - 1$

$= \frac{1}{2}(u_n - 2)$

$= \frac{1}{2}v_n$

**Conclusion : $(v_n)$ est une suite géométrique de premier terme $v_0$=1 et de raison $\frac{1}{2}$**

**5-** Déterminer $(v_n)$ en fonction de $n$

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 q^n = 1\left(\frac{1}{2}\right)^n$

**6-** <u>Déterminer par le calcul le plus petit entier naturel *n* tel que</u> $v_n \leq 10^{-3}$

$v_n \leq 10^{-3}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-3}$

$\ln\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \ln(10^{-3})$ car $x \mapsto \ln(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$n\ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq -3\ln(10)$

$n \geq \dfrac{-3\ln(10)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$ car $\ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ $\left(0 < \frac{1}{2} < 1\right)$

$n \geq \dfrac{3\ln(10)}{\ln(2)}$ car $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$

$\dfrac{3\ln(10)}{\ln(2)} \approx 9{,}96$

**<u>Conclusion</u> : le plus petit entier naturel *n* tel que $v_n \leq 10^{-3}$ est 10**