CORRECTION DU DEVOIR N°10

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = -1 + xe^x$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1- Déterminer l'ensemble de définition de f

$\boldsymbol{Df = \mathbb{R}}$

2- Déterminer les limites de f aux bornes de Df

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (-1) = -1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} xe^x = +\infty \end{cases}$ étude des branches infinies.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} (-1) = -1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0 \text{ croissances comparées} \end{cases}$

La droite d'équation $y = -1$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ en $-\infty$

3- Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et de la droite D d'équation $y = -1$

Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et D revient à étudier le signe de $f(x) - y_D = -1 + xe^x - (-1) = xe^x$

Or $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc $f(x) - y_D$ est du signe de x : $-$ 0 $+$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y_D$	$-$	0	$+$
position	$\mathscr{C}$ est en dessous de D	$\mathscr{C}$ coupe D en $(0; -1)$	$\mathscr{C}$ est au-dessus de D

4- Montrer que $\forall\, x \in Df,\ f'(x) = (x+1)\, e^x$

f est dérivable sur Df comme somme de foncions dérivables

$\forall\, x \in Df, f'(x) = 0 + 1e^x + xe^x = (x+1)e^x$

5- Étudier les variations de f

$\forall\, x \in Df$, $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x+1$: $-$ -1 $+$

Conclusion : f est décroissante sur $]-\infty,-1]$ et f est croissante sur $[-1, +\infty[$

6- Dresser le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-1		α	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		
$f(x)$	-1	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	0	$+\infty$

$f(-1) = -1 - 1e^{-1} = -1 - e^{-1}$

Rappel : $e^{-1} \approx 0{,}4$ donc $f(-1) \approx -1{,}4$

7- <u>Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$ puis que $\alpha \in [0,1]$</u>

♦ **Étude sur]– ∞ ; – 1]**

$\forall\, x \in\,]-\infty\,;-1]$, $f(x) \leq -1 < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]-\infty\,;-1]$

♦ **Étude sur [– 1 ; + ∞ [**

f est continue sur $[-1\,;+\infty[$ car dérivable

f est strictement croissante sur $[-1\,;+\infty[$ d'après le tableau de variation

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $f(-1) \approx -1{,}4 < 0$

donc f réalise une bijection de $[-1\,;+\infty[$ sur $f([-1\,;+\infty[) = [f(-1)\,;+\infty[$

Or $0 \in [f(-1)\,;+\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [-1\,;+\infty[$

De plus $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = -1+e \approx 1{,}7 > 0$ donc $\alpha \in [0,1]$

<u>Conclusion</u> : l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α et $\alpha \in [0,1]$

8- <u>Étudier la convexité de f</u>

$\forall\, x \in Df, f'(x) = (x+1)e^x$

f' est dérivable sur Df comme produit de foncions dérivables

$\forall\, x \in Df, f''(x) = 1e^x + (x+1)e^x = (1+x+1)e^x = (x+2)e^x$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $x+2$: $\; -\quad \underset{-2}{\oplus} \quad + \longrightarrow$

x	0	-2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
convexité	f est concave	point d'inflexion (-2, f(-2))	f est convexe

$f(-2) = -1 - 2e^{-2}$

9- <u>Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse -2, puis vous étudierez la position relative de $\mathscr{C}$ et T.</u>

Une équation cartésienne de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2 est donnée par

T : $y = f'(-2)\,(x-(-2)) + f(-2)$ avec $f'(-2) = (-2+1)e^{-2} = -e^{-2}$ et $f(-2) = -1-2e^{-2}$

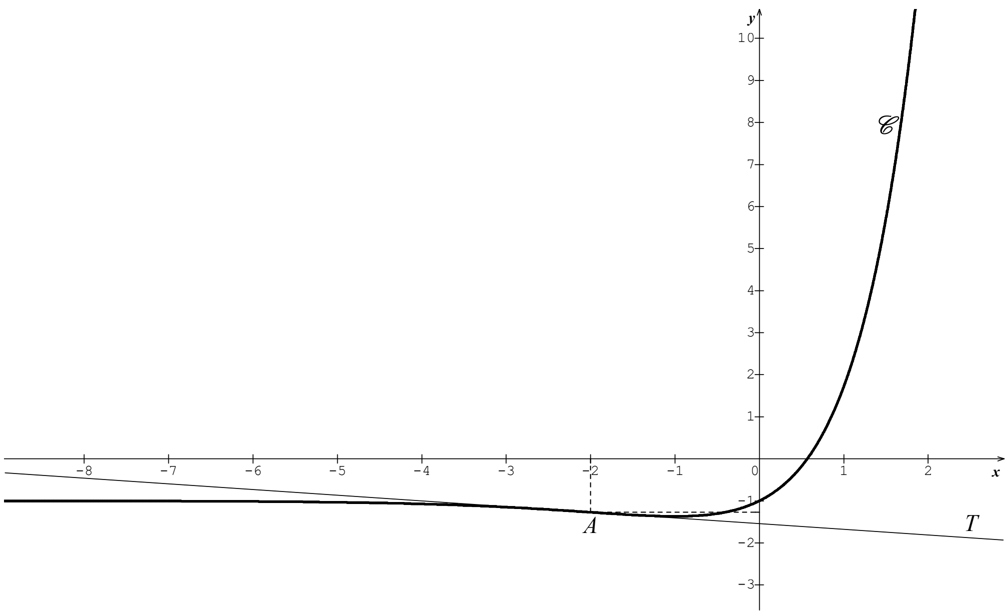
<u>Conclusion</u> T: $y = -e^{-2}(x+2) - 1 - 2e^{-2} = -xe^{-2} - 1 - 4e^{-2}$

De plus si $x < -2$, f est concave donc T est au-dessus de $\mathscr{C}$

et si $x > -2$, f est convexe donc T est en dessous de $\mathscr{C}$

Si $x = 2$, $\mathscr{C}$ et T se coupent en A

<u>Complément</u>: courbe non demandée



Exercice 2 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n - n$

et (v_n) définie par $\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \dfrac{n}{2} - \dfrac{1}{4}$

1- Calculer u_1, u_2, v_0, v_1 et v_2

$u_1 = 3u_0 - 0 = 0$

$u_2 = 3u_1 - 1 = -1$

$v_0 = u_0 - \dfrac{0}{2} - \dfrac{1}{4} = 0 - 0 - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{4}$

$v_1 = u_1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = 0 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{3}{4}$

$v_2 = u_2 - \dfrac{2}{2} - \dfrac{1}{4} = -1 - 1 - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{9}{4}$

2- Écrire un programme `Python` qui demande n à l'utilisateur et qui affiche u_n et v_n

de $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n - n$ il vient $u_k = 3u_{k-1} - (k-1) = 3u_{k-1} - k + 1$

de $\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \dfrac{n}{2} - \dfrac{1}{4}$ il vient $v_k = u_k - \dfrac{k}{2} - \dfrac{1}{4}$

```
n=int(input('n='))
u=0 # u0
for k in range(1,n+1):
    u=3*u-k+1
    v=u-k/2-1/4
print('u=',u)
print('v=',v)
```

3- Écrire un programme `Python` qui demande n à l'utilisateur et qui affiche $S = \sum_{k=0}^{n} u_k$

```
n=int(input('n='))
u=0 # u0
S=u
for k in range(1,n+1) :
    u=3*u-k+1
    S=S+u
print('S=',S)
```

4- Montrer que (v_n) est une suite géométrique

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{n+1}{2} - \frac{1}{4}$$
$$= 3u_n - n - \frac{n}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$
$$= 3u_n - \frac{3}{2}n - \frac{3}{4}$$
$$= 3\left(u_n - \frac{n}{2} - \frac{1}{4}\right)$$
$$= 3v_n$$

Conclusion : (v_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = -\frac{1}{4}$

5- Déterminer v_n ouis u_n en fonction de n

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 q^n = \left(-\frac{1}{4}\right)3^n = -\frac{3^n}{4}$$

de $v_n = u_n - \frac{n}{2} - \frac{1}{4}$ il vient $u_n = v_n + \frac{n}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{3^n}{4} + \frac{n}{2} + \frac{1}{4}$

Conclusion : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_n = -\frac{3^n}{4}$ et $u_n = -\frac{3^n}{4} + \frac{n}{2} + \frac{1}{4} = \frac{-3^n + 2n + 1}{4}$

Remarque:

$v_1 = -\frac{3^1}{4} = -\frac{3}{4}$ et $v_2 = -\frac{3^2}{4} = \frac{9}{4}$ on retrouve les résultats de la question 1

$u_0 = \frac{-3^0+0+1}{4} = \frac{-1+1}{4} = 0$, $u_1 = \frac{-3^1+2\times1+1}{4} = \frac{-3+2+1}{4} = \frac{0}{4} = 0$

et $u_2 = \frac{-3^2+2\times2+1}{4} = \frac{-9+4+1}{4} = -\frac{4}{4} = -1$ on retrouve les résultats de la question 1.

Exercice 3 :

La médiathèque d'une université possède des DVD de deux provenances, les DVD reçus en dotation et les DVD achetés. Par ailleurs, on distingue les DVD qui sont de production européenne et les autres.

On choisit au hasard un de ces DVD. On note :

D l'évènement « le DVD a été reçu en dotation »

U l'évènement « le DVD est de production européenne »

$\frac{1}{4}$ des DVD ont été reçu en dotation.

Parmi les DVD reçus en dotation , 65% proviennent de production européenne.

Et 76,25% des DVD sont de production européenne.

1- Donner la probabilité de *U* sachant *D*.

Parmi les DVD reçus en dotation , 65% proviennent de production européenne donc $p_D(U) = 0{,}65$

2- Calculer $p(\bar{D})$

$p(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

3- Calculer la probabilité que le DVD choisi ait été reçu en dotation et soit de production européenne

$p(D \cap U) = p(D) p_D(U) = \frac{1}{4} \times 0{,}65 = 0{,}1625$

Conclusion : la probabilité que le DVD choisi ait été reçu en dotation et soit de production européenne est 0,1625

4- Montrer que la probabilité que le DVD choisi ait été acheté et soit de production européenne est égale à 0,6.

D et $\bar{D}$ forment un système complet d'événement donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$p(U) = p(U \cap D) + p(U \cap \bar{D})$

$p(U \cap \bar{D}) = p(U) - p(U \cap D) = 0{,}7625 - 0{,}1625 = 0{,}6$

Conclusion : la probabilité que le DVD choisi ait été acheté et soit de production européenne est égale à 0,6.

5- Sachant que le DVD choisi a été acheté, calculer la probabilité qu'il soit de production européenne.

$p(\bar{D}) = \frac{3}{4} \neq 0$ donc $p_{\bar{D}}(U) = \dfrac{p(\bar{D} \cap U)}{p(\bar{D})} = \dfrac{0{,}6}{\frac{3}{4}} = 0{,}6 \times \frac{4}{3} = 0{,}2 \times 4 = 0{,}8$

Conclusion : la probabilité que le DVD choisi soit de production européenne sachant qu'il a été acheté est 0,8

6- On choisit trois DVD au hasard. On admet que le nombre de DVD est suffisamment grand pour que ce choix soit assimilé à trois tirages successifs indépendants avec remise. Déterminer la probabilité de l'évènement : « exactement deux des trois DVD choisis ont été reçus en dotation ».

On note D_i l'événement : «le DVD n°i a été reçu en dotation »

On note X le nombre de DVD reçus en dotation

$P(X = 2) = P\left(D_1 \cap D_2 \cap \overline{D_3}\right) \cup \left(D_1 \cap \overline{D_2} \cap D_3\right) \cup \left(\overline{D_1} \cap D_2 \cap D_3\right)$

$= P\left(D_1 \cap D_2 \cap \overline{D_3}\right) + P\left(D_1 \cap \overline{D_2} \cap D_3\right) + P\left(\overline{D_1} \cap D_2 \cap D_3\right)$ car les événements sont disjoints

$= P(D_1)P(D_2)P\left(\overline{D_3}\right) + P(D_1)P\left(\overline{D_2}\right)P(D_3) + P\left(\overline{D_1}\right)P(D_2)P(D_3)$ car les choix sont indépendants

$= 3\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right) = 3 \times \frac{1}{16} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$

Conclusion : la probabilité de l'évènement : « exactement deux des trois DVD choisis ont été reçus en dotation ». est $\frac{3}{64}$