CORRECTION DU DEVOIR N°12

Exercice 1 :

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$u_0 = -1$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

1- Écrire un programme `Python` qui pour la valeur de n affiche la valeur de u_n .

```
n=int(input('n=')
u,v=-1,1/2 # u0 et u1
for k in range(2, n+1):
    u,v=v,v-1/4*u
print(v)
```

attention suite récurrente double affectations simultanées

2- Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

On remplace n par 0 dans la définition de la suite (u_n)

$$u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$u_2 - u_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$u_1 - u_0 = \frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

Puisque $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ alors (u_n) n'est pas arithmétique

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{2}$$

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{\frac{1}{2}}{-1} = -\frac{1}{2}$$

Puisque $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$ alors (u_n) n'est pas géométrique.

Conclusion :

(u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

$\boldsymbol{u_2 = \frac{3}{4}}$

3- On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

a) Calculer v_0.

$$v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times (-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Conclusion : $\boldsymbol{v_0 = 1}$

b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) = \frac{1}{2}v_n$

Conclusion : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$

c) En déduire la nature de la suite (v_n) et préciser sa raison.

(v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1$

d) Exprimer v_n en fonction de n.

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 q^n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

4- On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n : $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$

a) Calculer w_0.

$w_0 = \dfrac{u_0}{v_0} = \dfrac{-1}{1} = -1$

Conclusion : $w_0 = -1$

b) En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a: $w_{n+1} = w_n + 2$

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$ et par suite $v_{n+1} \neq 0$

et comme $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ on a :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{v_{n+1}} = \frac{v_n}{v_{n+1}} + \frac{1}{2}\,\frac{u_n}{v_{n+1}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}} + \frac{1}{2}\,\frac{u_n}{\left(\frac{1}{2}v_n\right)} = 2 + \frac{u_n}{v_n} = 2 + w_n$$

Conclusion : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$

c) Exprimer w_n en fonction de n.

(w_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $w_0 = 2$

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 + nr = -1 + 2n$

5- Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ donc $u_n = w_n v_n = (2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \dfrac{2n-1}{2^n}$

Conclusion : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$

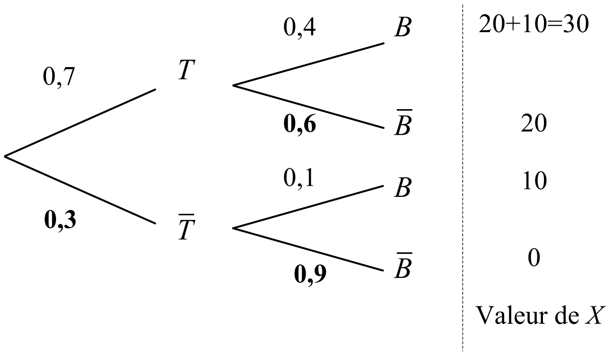
Exercice 2 :

Dans une ville, une enquête portant sur les habitudes des ménages en matière d'écologie a donné les résultats suivants :

- 70 % des ménages pratiquent le tri sélectif ;
- parmi les ménages pratiquant le tri sélectif, 40 % consomment des produits bio;
- parmi les ménages ne pratiquant pas le tri sélectif, 10 % consomment des produits bio.

On choisit un ménage au hasard et on note :
T l'évènement « le ménage pratique le tri sélectif »
B l'évènement « le ménage consomme des produits bio »

1- Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré si cela est possible



2- Calculer la probabilité de l'évènement : « le ménage pratique le tri sélectif et consomme des produits bio ».

$p(T \cap B) = p(T)p_T(B) = 0{,}7 \times 0{,}4 = 0{,}28$

Conclusion : la probabilité de l'évènement : « le ménage pratique le tri sélectif et consomme des produits bio » est 0,28.

3- Montrer que la probabilité que le ménage consomme des produits bio est égale à 0,31.

T et $\overline{T}$ forment un système complet d'événement donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} p(B) &= p(T \cap B) + p(B \cap \overline{T}) \\ &= p(T \cap B) + p(\overline{T}) \times p_{\overline{T}}(B) \\ &= p(T \cap B) + (1 - p(T)) \times p_{\overline{T}}(B) \\ &= 0{,}28 + 0{,}3 \times 0{,}1 = 0{,}28 + 0{,}03 = 0{,}31 \end{aligned}$$

Conclusion : la probabilité que le ménage consomme des produits bio est égale à 0,31

4- Calculer la probabilité que le ménage pratique le tri sélectif sachant qu'il consomme des produits bio

$p(B) = 0{,}31 \neq 0$

$$p_B(T) = \frac{p(B \cap T)}{p(B)} = \frac{0{,}28}{0{,}31} = \frac{28}{31}$$

Conclusion : la probabilité que le ménage pratique le tri sélectif sachant qu'il consomme des produits bio est 28/31

5- Les évènements T et B sont-ils indépendants ? Justifier.
$p(T)\times p(B) = 0{,}7 0{,}31 = 0{,}217$ et $p(T\cap B) = 0{,}28$
donc $p(T\cap B) \neq p(T)P(B)$

Conclusion : les évènements *T* et *B* ne sont pas indépendants

6- Calculer la probabilité de l'évènement $T\cup B$ puis interpréter ce résultat.
$p(T\cup B) = p(T)+p(B)-p(T\cap B) = 0{,}7+0{,}31-0{,}28 = 0{,}73$

Conclusion : la probabilité de l'évènement $T\cup B$ est 0,73 ce qui signifie que 73% des ménages pratiquent le tri sélectif ou consomment des produits bio.

7- Cette ville décide de valoriser les ménages ayant un comportement éco-citoyen. Pour cela, elle donne chaque année un chèque de 20 € aux ménages qui pratiquent le tri sélectif et un chèque de 10 € aux ménages qui consomment des produits bio sur présentation de justificatifs (les deux montants peuvent être cumulés).Soit X la somme d'argent reçue par un ménage.

a) Donner la loi de probabilité de X.

$X(\Omega) = \{0, 10, 20, 30\}$

$p(X=0) = p(\overline{B}\cap\overline{T}) = p(\overline{T})p_{\overline{T}}(\overline{B}) = p(\overline{T})(1-p_{\overline{T}}(B)) = 0{,}3\times 0{,}9 = 0{,}27.$

$p(X=10) = p(B\cap\overline{T}) = 0{,}03$

$p(X=20) = p(\overline{B}\cap T) = p(T)p_T(\overline{B}) = p(T)(1-p_T(B)) = 0{,}7\times 0{,}6 = 0{,}42.$

$p(X=30) = p(T\cap B) = 0{,}28$

x_i	0	10	20	30	total
p_i	0,27	0,03	0,42	0,28	1
$x_i\, p_i$	0	0,3	8,4	8,4	17,1

b) Calculer l'espérance mathématique de cette loi et interpréter ce résultat.

$E(X) = \sum x_i p_i = 17{,}1$ € ce qui signifie que la ville donnera en moyenne 17,1 € par ménage

c) Déterminer la fonction de répartition et la représenter graphiquement
$\forall\, x \in \mathbb{R},\ F(x) = p(X \leq x)$
si $x < 0$ alors $F(x) = 0$
si $0 \leq x < 10$ alors $F(x) = P(X=0) = 0{,}27$
si $10 \leq x < 20$ alors $F(x) = P(X=0)+P(X=10) = 0{,}27+0{,}03 = 0{,}3$
si $20 \leq x < 30$ alors $F(x) = P(X=0)+P(X=10)+P(X=20) = 0{,}27+0{,}3+0{,}42 = 0{,}72$
si $30 \leq x$ alors $F(x) = P(X=0)+P(X=10)+P(X=20)+P(X=30) = 0{,}27+0{,}3+0{,}42+0{,}28 = 1$