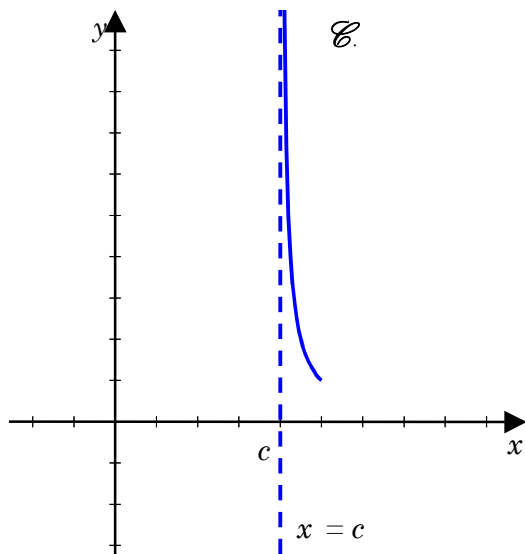


CHAPITRE 15 : LIMITES Actes II

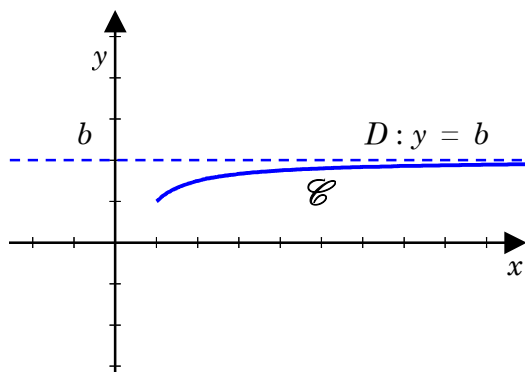
I- INTERPRÉTATION GRAPHIQUE DES LIMITES

- Si $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm \infty$ alors la droite d'équation est asymptote à \mathcal{C} .



Remarque : c est une **valeur interdite** $Df =]c ; \dots$ ou $Df = \dots ; c[$

- Si $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = b$ alors la droite D d'équation est asymptote à \mathcal{C} .



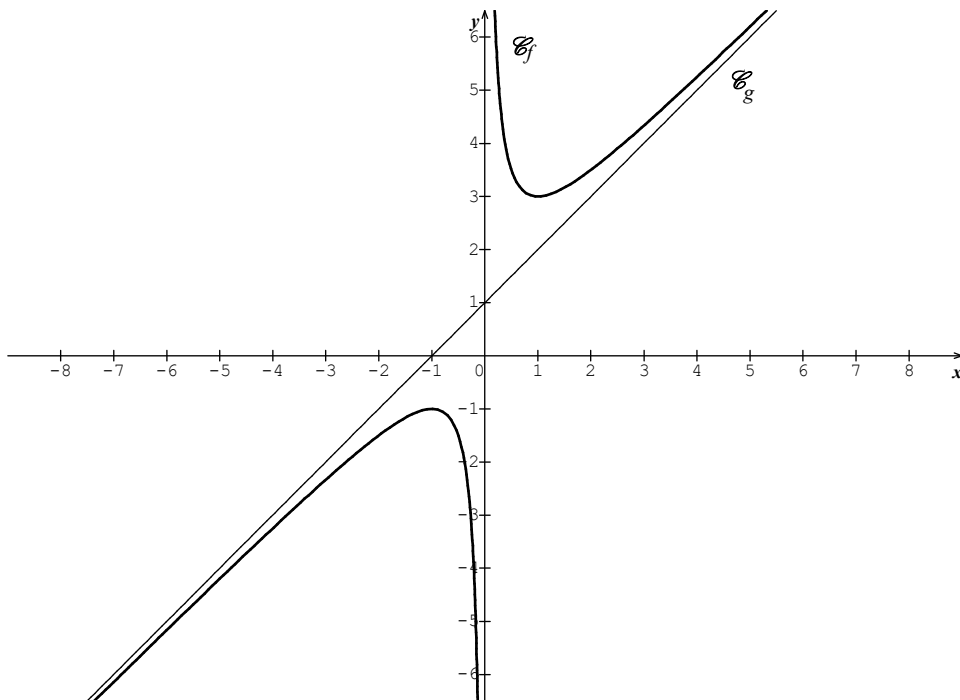
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ dans ce cas, il n'y a pas d'asymptote.
- Si $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty$ alors il faut étudier les branches infinies

II- ETUDE DES BRANCHES INFINIES

1- COURBE ASYMPTOTE

\mathcal{C}_f est asymptote à \mathcal{C}_g en $+\infty$ (resp en $-\infty$) si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$
(resp $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - g(x)) = 0$)

Cela signifie qu'en $+\infty$ les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g se rapprochent indéfiniment



Remarque:

Pour étudier la position relative des courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g (i.e savoir si \mathcal{C}_f est sur ou sous \mathcal{C}_g), il faut étudier le signe de $f(x) - g(x)$.

METHODE : COMMENT PROUVER QU'UNE DROITE EST ASYMPTOTE OBLIQUE

On calcule $f(x) - y_D$ puis la limite en ∞ . Celle-ci doit être nulle pour conclure

Exemple :

soit f la fonction définie par $f(x) = x + 2 + e^{-x}$ et D la droite d'équation $y = x + 2$

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis démontrer que D est asymptote à \mathcal{C}_f . Etude de la position relative.

2- 1^{ER} CAS DE RECHERCHE D'ASYMPTOTE OBLIQUE

Si $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à \mathcal{C} .

METHODE : COMMENT REPÉRER UNE ASYMPTOTE OBLIQUE

Si la fonction se décompose en 2 parties : une droite et une fonction qui tend vers 0 alors la droite est asymptote oblique (il faudra toujours le démontrer)

Exemple :

soit $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x}$

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

La courbe \mathcal{C} admet-elle une asymptote oblique ? Etude de la position relative .

3- CAS DES FRACTIONS RATIONNELLES

Soit $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$, une fraction rationnelle

On aura l'existence d'une asymptote oblique si $\deg(N) - \deg(D) = 1$

Exemple :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 7}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x - 7}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3x - 7}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$$

Donc étude des branches infinies

De plus $\deg(N) - \deg(D) = \dots\dots\dots$ donc il existe une asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$

4- ÉTUDE DES BRANCHES INFINIES DANS LE CAS GÉNÉRAL

Soit f une fonction tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$. Donc on doit étudier les branches infinies

METHODE

a) Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

□ Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. On dit que \mathcal{C} admet une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$.

□ Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$. On dit que \mathcal{C} admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

□ Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ un nombre fini différent de 0, il faut poursuivre l'étude

b) Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$

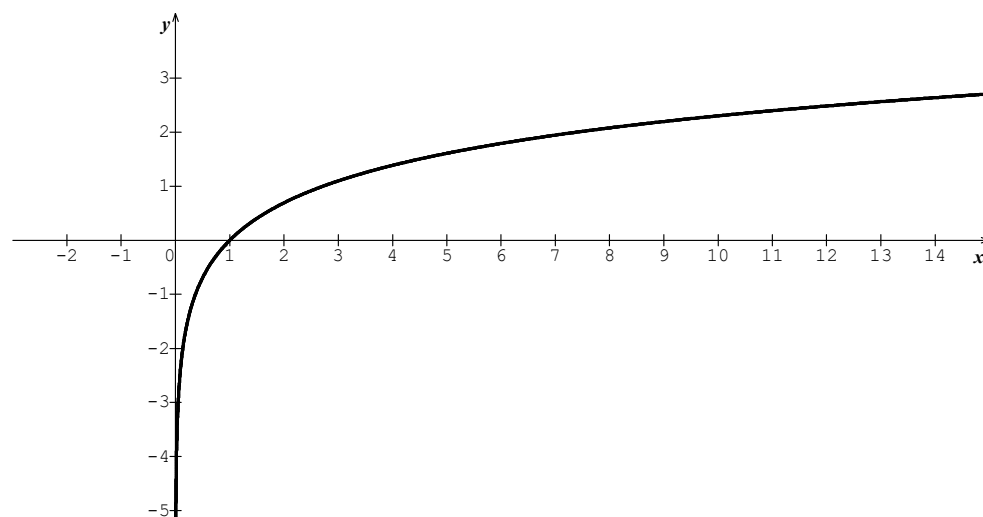
□ Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \infty$. On dit que \mathcal{C} admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = ax$ en $+\infty$.

□ Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b$ un nombre fini. On dit que la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est asymptote à \mathcal{C} en $+\infty$

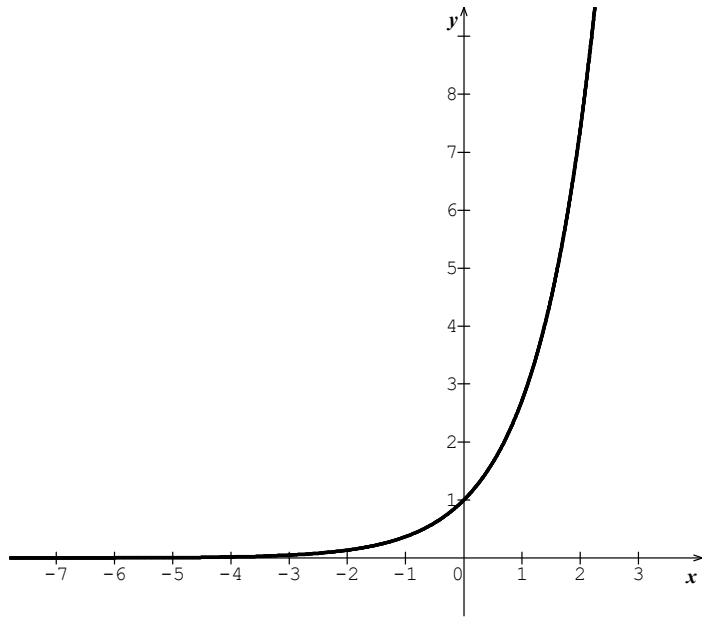
Remarque : l'étude est identique en $-\infty$

Exemples

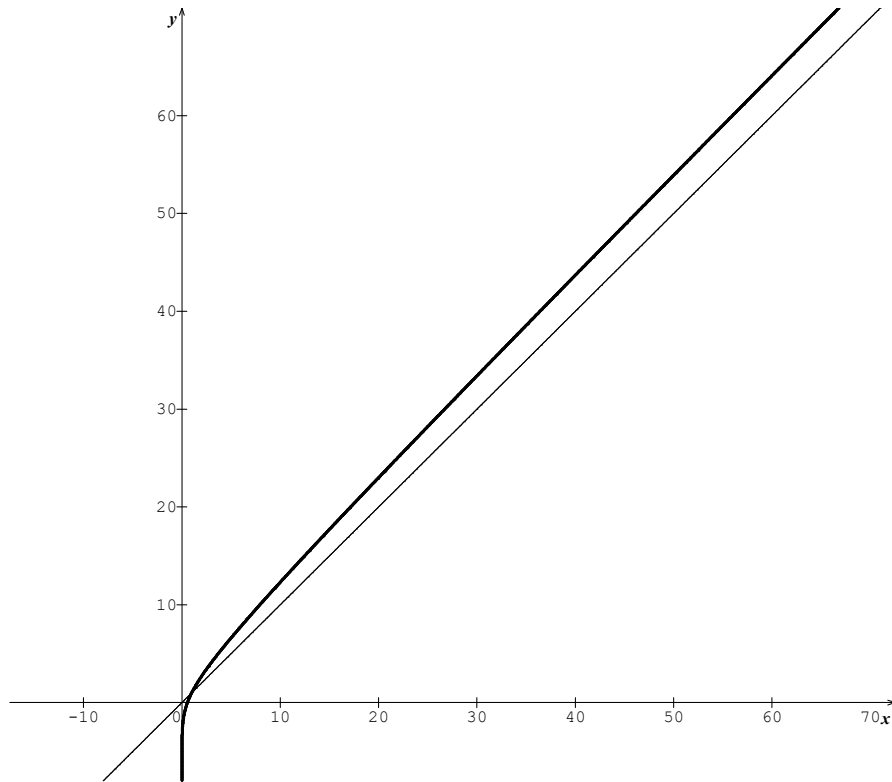
1. $f(x) = \ln(x)$ $Df =]0 ; +\infty[$



2. $f(x) = e^x$ $Df = \mathbb{R}$



3. $f(x) = x + \ln(x)$ $Df =]0 ; +\infty[$



4. $f(x) = \frac{2x^2+x-4}{x-1}$ $Df = \mathbb{R} - \{1\}$

