FICHE PRATIQUE
CROISSANCES COMPARÉES

Je vous rappelle les formes indetrerminées : $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\times\infty$, $(+\infty)+(-\infty)$ et 1^{∞}

Les croisances comparées sont des moyens pour enlever une forme inderminée mais doit être utilisées dans de bonnes conditions.

Nous allons essayer dans cette fiche de répondre à 3 questions

1. comment les repèrer
2. comment les appliquer
3. comment les utiliser quand elles ne sont pas présentes autrement dit comment les faire apparaitre

A– COMMENT LES REPÉRER

Les 4 conditions pour utiliser les croissances comparées sont :

- la limite doit se calculer en ∞
- la limite doit présenter une **forme indéterminée**
- la fonction doit être un **produit ou un quotient** d'une fonction monôme et un logarithme ou d'une fonction monôme et une exponentielle ou d'une fonction exponentielle et un logarithme **à n'importe quelle puisance positive**
- l'argument à l'interieur doit être le même (**même "x"**)

Dire si dans les limites suivantes on peut utiliser les croisances comparées

	limites	oui	non	pourquoi
1.	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$			
2.	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$			
3.	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}}$			
4.	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x+1}$			
5.	$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x}$			
6.	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x}{x}$			
7.	$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x$			

8.	$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x}}{x}$			
9.	$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{x}$			
10.	$\lim_{x \to +\infty} xe^{-x}$			
11.	$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x)}{x}$			
12.	$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$			
13.	$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))^5}{\sqrt{x}}$			
14.	$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x-5)}{x}$			
15.	$\lim_{x \to +\infty} (\ln(x)-x)$			
16.	$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x+3}{e^x}$			
17.	$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x-\ln(x)}{x+3}$			

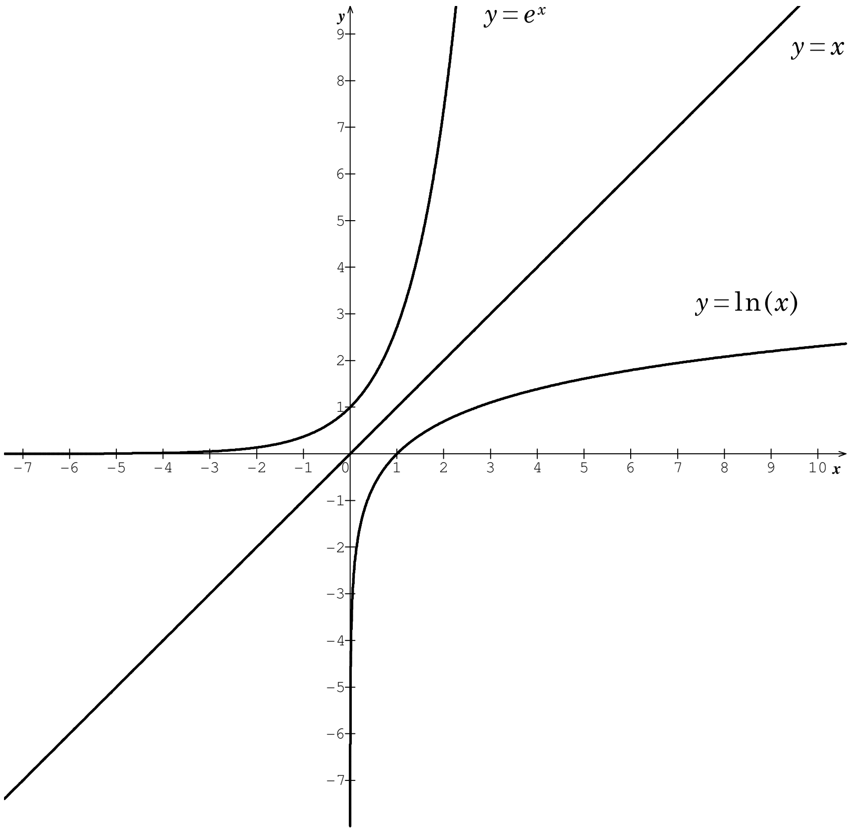
B– COMMENT LES APPLIQUER

On établit un “ rapport de force ” entre les classes de fonctions. On va dire qu’une classe de fonction est plus forte qu'une autre en ∞ autrement dit qu'elle tend plus rapidement vers l’infini qu’une autre classe de fonction.

Du plus faible au plus fort , on a : logarithmes puis x puis exponentielles et ceci à n'importe quelle puisance positive ce qu'on note symboliquement par :

$$\forall\ (a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 \quad \ln(x)^a \ll x^b \ll (e^x)^c$$

voir le graphique page suivante



Le principe est simple: dés que l'on a repéré des **croissances comparées**, on **cache le plus faible** et on garde le plus fort **et on calcul la limite.**

Calculer les limites suivantes si cela est possible par croissances comparées

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt{x}} =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x+1} =$

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x}}{x} =$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x}}{x} =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} =$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x)}{x} =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln(x))^5}{\sqrt{x}} =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x-5)}{x} =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(x)-x) =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x+3}{e^x} =$

C – COMMENT LES FAIRE APPARAÎTRE

Le but de cette partie est d'enlever la forme indéterminée et d'utiliser les croissances comparées en les faisant apparaître.
Je vais traiter 3 types d'exemples classiques
Pour plus de cas, voir la fiche d'exercices

a) *1er cas changement simple d'écriture*

$$\lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \quad \text{croissances comparées}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(e^x)^3}{x} = +\infty \quad \text{croissances comparées}$$

b) *2eme cas des quotients proches de la croissances comparées*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x-5)}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x-5)}{x-5} \times \frac{x-5}{x} = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x-5)}{x-5} = \lim_{u \to +\infty} \frac{\ln(u)}{u} = 0 \text{ croissances comparées} \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{x-5}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \to +\infty} 1 = 1 \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : limite de la méthode $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2-5)}{x}$

$$\frac{\ln(x^2-5)}{x} = \frac{\ln(x^2-5)}{x^2-5} \times \frac{x^2-5}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2-5)}{x^2-5} = \lim_{u \to +\infty} \frac{\ln(u)}{u} = 0 \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-5}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \text{ mais } 0 \times \infty \text{ est une FI!!!}$$

c) 3eme cas sommes ou tous les autres cas

A défaut d'idée, on pense à factoriser par le terme prépondérant

$$\lim_{x \to +\infty} (e^x - x) = \lim_{x \to +\infty} e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ croissances comparées} \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : limite de la méthode $\lim_{x \to +\infty} (x^2+1)e^{-x}$

On a bien une FI du type $\infty \times 0$ mais on ne peut factoriser par le terme prépondérant (e^{-x}) car c'est déjà factorisé. Donc il ne nous reste qu'une **dernière solution développer.**

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2e^{-x} + e^{-x}) = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \to +\infty} x^2e^{-x} = 0 \text{ croissances comparées} \\ \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 \end{cases}$$