LYCEE JEAN PERRIN **2025-2026**

EC 1

CORRECTION DU DEVOIR N°13

Exercice 1 :

Déterminer les limites des fonctions suivantes au point a après avoir déterminer l'ensemble de définition des fonctions

1- $f(x) = 3x^7$ $\quad a = -1$

$Df = \mathbb{R}$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 3(-1)^7 = -3}$

2- $f(x) = e^{x^2 - x - 1}$ $\quad a = 1$

$Df = \mathbb{R}$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 1} f(x) = e^{1^2 - 1 - 1} = e^{-1}}$

3- $f(x) = e^{x^2 - x - 1}$ $\quad a = +\infty$

$Df = \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - x - 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{u \to +\infty} e^u = +\infty \end{cases}$$

Étude des branches infinies

4- $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $\quad a = 0$

$Df = \mathbb{R}^*$

signe de x^2 :

x		0	
x^2	$+$	0	$+$

$$\boldsymbol{\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0^+ \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 = 0^+ \end{cases}$$

Donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}$

5- $f(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{x^2 + 3x + 2}$ $\quad a = -\infty$

f existe $\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ et $x \neq -2$

$Df = \mathbb{R} - \{-1 ; -2\}$

$$\boldsymbol{\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0} \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x^2} = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} (-x^2) = -\infty \\ \lim\limits_{u \to -\infty} e^u = 0 \end{cases} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 3x + 2) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \end{cases}$$

Donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ en $-\infty$

6- $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x^2+3x+2}$ $\qquad a=-2$

f existe $\Leftrightarrow x^2+3x+2\neq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+2)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$ et $x\neq -2$

$Df=\mathbb{R}-\{-1\,;-2\}$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to -2} f(x)=} \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x+1)}=\lim_{x\to -2}\frac{x-3}{x+1}=-\frac{-5}{-1}=\boldsymbol{-5}$$

Attention pas d'étude de signe du dénominateur mais factorisation car forme 0/0 !!!

7- $f(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$ $\qquad a=-1$

f existe $\Leftrightarrow x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$

$Df=\mathbb{R}-\{-1\}$

signe de $x+1$: $\quad - \;\; \oplus_{-1} \;\; +$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to (-1)^+} f(x)=}-\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to(-1)^+}(x-3)=-4 \\ \lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)=0^+ \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to (-1)^-} f(x)=+\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to(-1)^-}(x-3)=-4 \\ \lim\limits_{x\to(-1)^-}(x+1)=0^- \end{cases}$$

Donc la droite d'équation $x=-1$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}$

8- $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-\ln(x)}$ $\qquad a=0^+$ (vous ne déterminerez pas Df)

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0^+} f(x)=0} \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}(3x+1)=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(x-\ln(x))=+\infty \end{cases}$$

9- $f(x)=\dfrac{7x^2-3x+1}{2x^2+1}$ $\qquad a=+\infty$

f existe $\Leftrightarrow 2x^2+1\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq -\dfrac{1}{2}$ toujours vraie

$Df=\mathbb{R}$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{7x^2}{2x^2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{7}{2}=\frac{7}{2}}$$

Donc la droite d'équation $y=\dfrac{7}{2}$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ en $+\infty$

10- $f(x)=(x^2+3)\ln(x)$ $\qquad a=0^+$

f existe $\Leftrightarrow x>0$ donc $Df=\mathbb{R}_+^*$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0^+} f(x)=}-\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}(x+3)=3 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty \end{cases}$$

Donc la droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}$

11- $f(x)=\dfrac{e^x+2x-1}{x^2+\ln(x)}$ $\qquad a=+\infty$ (vous ne déterminerez pas Df)

En remplaçant x par $+\infty$ on trouve une forme indéterminée aussi il faut factoriser $f(x)$ par le terme prépondérant ici e^x au numérateur et x^2 au dénominateur.

$$f(x)=\frac{e^x+2x-1}{x^2+\ln(x)}=\frac{e^x\left(1+2\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right)}{x^2\left(1+\frac{\ln(x)}{x^2}\right)}=\frac{e^x}{x^2}\times\frac{1+2\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{\ln(x)}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+2\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right)=1 \text{ car }\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0 \text{ croissances comparées}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\ln(x)}{x^2}\right)=1 \text{ car } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}=0 \text{ croissances comparées}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty} \text{ car }\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=+\infty \text{ croissances comparées}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+2\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{\ln(x)}{x^2}}=1\end{cases}$$

Étude des branches infinies

Exercice 2 :

On considère deux urnes U_1 et U_2.

L'urne U_1 contient deux boules blanches et une boule noire, l'urne U_2 contient trois boules blanches et deux boules noires. On effectue des tirages avec remise.

On tire une première boule dans l'urne U_1.

Si cette première boule est blanche, on tire une seconde boule dans l'urne U_1. Sinon, on tire une seconde boule dans l'urne U_2.

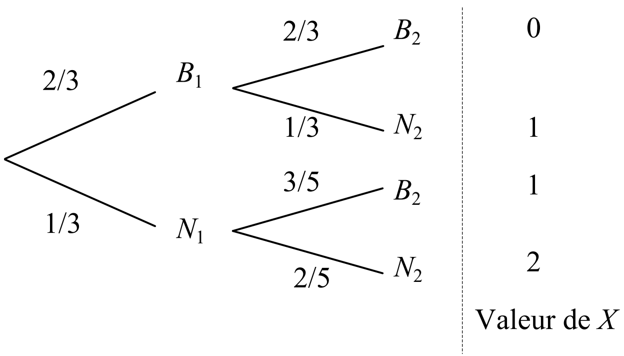
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules noires tirées.

L'évènement le second tirage a lieu dans l'urne U_1 est appelle U.

On appelle B_k l'évènement "la boule blanche est obtenue au k−ième tirage" et N_k l'évènement "la boule noire est obtenue au k−ième tirage"

1- Déterminer $P(U)$.

Établissons un arbre pondéré traduisant la situation :



L'événement U est réalisé lorsque l'on a tiré une boule blanche lors du premier tirage, donc $P(U) = P(B_1) = \frac{2}{3}$.

<u>Conclusion</u> : $P(U)=P(B_1)=\frac{2}{3}$

2- <u>Donner $X(\Omega)$.</u>

$X(\Omega)=\{0, 1, 2\}=[\![0, 2]\!]$

3- <u>Donner la loi de X.</u>

$$P(X=0) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) = \frac{2}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{4}{9} = \frac{20}{45}$$

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P((B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2)) \\ &= P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2) \qquad \text{car } (B_1 \cap N_2) \text{ et } (N_1 \cap B_2) \text{ sont disjoints} \\ &= P(B_1)P_{B_1}(N_2) + P(N_1)P_{N_1}(B_2) \\ &= \frac{2}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{3}{5} \\ &= \frac{2}{9} + \frac{1}{5} \\ &= \frac{10+9}{45} = \frac{19}{45} \end{aligned}$$

$$P(X=2) = P(N_1 \cap N_2) = P(N_1)P_{N_1}(N_2) = \frac{1}{3}\times\frac{2}{5} = \frac{2}{45}$$

d'où la loi de X:

x_i	0	1	2	total
p_i	$\frac{20}{45}$	$\frac{19}{45}$	$\frac{6}{45}$	1
$x_i p_i$	0	$\frac{19}{45}$	$\frac{12}{45}$	$\frac{31}{45}$

4- <u>Calculer l'espérance de X.</u>

$$E(X) = \sum x_i p_i = \frac{31}{45}$$

5- <u>Déterminer la fonction de répartition et la représenter graphiquement.</u>

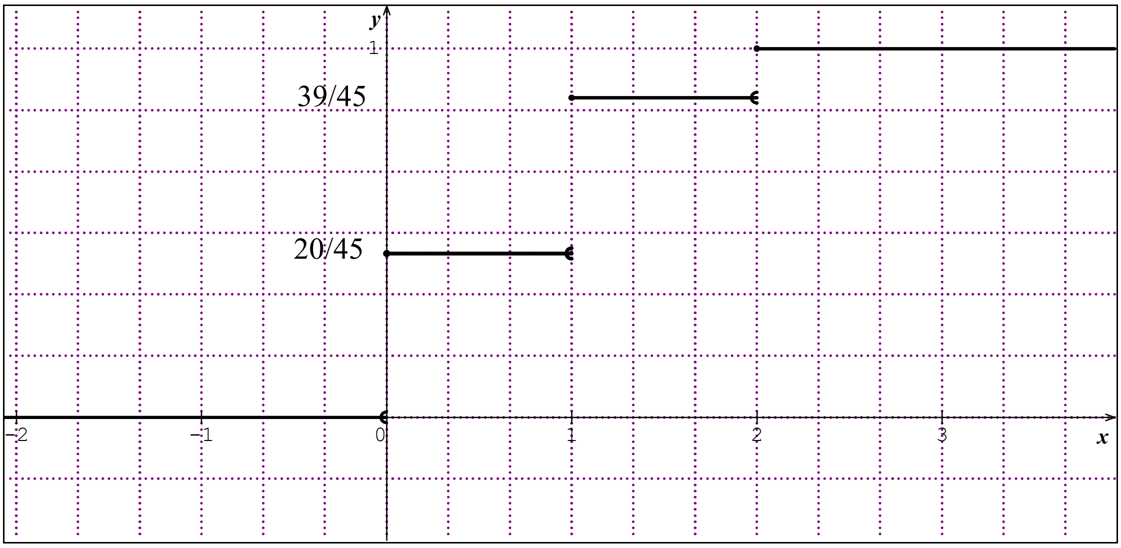
$\forall\, x \in \mathbb{R},\ F(x) = P(X \leq x)$

si $x < 0, F(x) = 0$

si $0 \leq x < 1, F(x) = P(X=0) = \frac{20}{45}$

si $1 \leq x < 2, F(x) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{20}{45} + \frac{19}{45} = \frac{39}{45}$

si $2 \leq x$, $F(x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 1$


y
1
39/45
20/45
−2
−1
0
1
2
3
x