

CORRECTION DU DEVOIR N°14

Exercice 1 :

Une urne A contient quatre boules rouges et six boules noires.

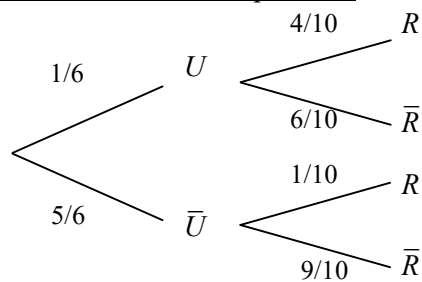
Une urne B contient une boule rouge et neuf boules noires.

Les boules sont indiscernables au toucher.

Partie A

Un joueur dispose d'un dé à six faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. Il le lance une fois : s'il obtient 1, il tire au hasard une boule de l'urne A, sinon il tire au hasard une boule de l'urne B.

1- Soit  $R$  l'évènement « le joueur obtient une boule rouge » et  $U$  l'évènement « le joueur obtient 1 avec le dé » . Établir l'arbre pondéré.



2- Montrer que  $p(R) = \frac{3}{20}$ .

$U$  et  $\bar{U}$  forment un système complet d'évènement donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} p(R) &= p(U \cap R) + p(R \cap \bar{U}) \\ &= p(U)p_U(R) + p(\bar{U}) \times p_{\bar{U}}(R) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{4}{10} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{10} \\ &= \frac{9}{60} = \frac{3}{20} \end{aligned}$$

Conclusion :  $p(R) = \frac{3}{20}$

---

3- Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A est-elle supérieure ou égale à la probabilité qu'elle provienne de B?

Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A est  $p_R(U)$

et si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de B est  $p_R(\bar{U})$

reste à comparer ces 2 probabilités autrement dit quelle est la probabilité la plus grande ( ou petite)

$$P(R) = \frac{9}{60} \neq 0 \text{ donc}$$

$$p_R(U) = \frac{P(R \cap U)}{P(R)} = \frac{\frac{4}{60}}{\frac{9}{60}} = \frac{4}{9} \quad \text{et} \quad p_R(\bar{U}) = \frac{P(R \cap \bar{U})}{P(R)} = \frac{\frac{5}{60}}{\frac{9}{60}} = \frac{5}{9}$$

Conclusion:  $\frac{4}{9} < \frac{5}{9}$  donc si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A n'est pas supérieure ou égale à la probabilité qu'elle provienne de B?

---

**Partie B**

Le joueur répète deux fois l'épreuve décrite dans la partie A, dans des conditions identiques et indépendantes (c'est-à-dire qu'à l'issue de la première épreuve, les urnes retrouvent leur composition initiale).

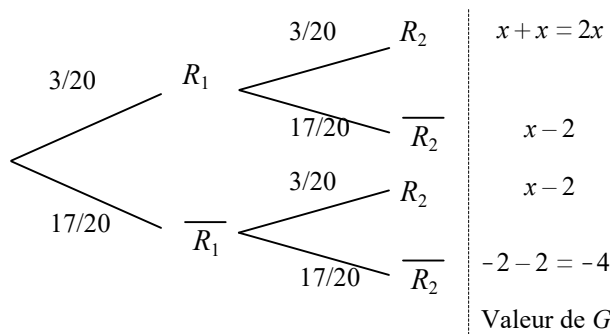
Soit  $x$  un entier naturel non nul.

Lors de chacune des deux épreuves, le joueur gagne  $x$  euros s'il obtient une boule rouge et perd deux euros s'il obtient une boule noire.

On désigne par  $G$  la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur en euros au terme des deux épreuves.

1- Déterminer les valeurs prises de la variable aléatoire  $G$ .

On note  $R_k$  l'évènement : " la boule rouge est tirée au  $k$ -ième tirage"



Remarque: Les probabilités sont inchangées car il y a indépendance.

**Conclusion :**  $G(\Omega) = \{-4, x-2, 2x\}$

2- Déterminer la loi de probabilité de  $G$ .

$$P(G = 2x) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)P(R_2) = \frac{3}{20} \times \frac{3}{20} = \frac{9}{400} \text{ car les tirages sont indépendants.}$$

$$P(G = -4) = P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2}) = P(\overline{R_1})P(\overline{R_2}) = \frac{17}{20} \times \frac{17}{20} = \frac{289}{400} \text{ car les tirages sont indépendants.}$$

$$\begin{aligned} P(G = x-2) &= P((R_1 \cap \overline{R_2}) \cup (\overline{R_1} \cap R_2)) \\ &= P(R_1 \cap \overline{R_2}) + P(\overline{R_1} \cap R_2) \quad \text{car } (R_1 \cap \overline{R_2}) \cap (\overline{R_1} \cap R_2) = \emptyset \\ &= P(R_1)P(\overline{R_2}) + P(\overline{R_1})P(R_2) \quad \text{car les tirages sont indépendants.} \\ &= \frac{3}{20} \frac{17}{20} + \frac{17}{20} \frac{3}{20} = \frac{102}{400} \end{aligned}$$

**Conclusion :**

$g_i$	-4	$x-2$	$2x$	<b>total</b>
$p_i$	$\frac{289}{400}$	$\frac{102}{400}$	$\frac{9}{400}$	<b>1</b>
$g_i p_i$	$-\frac{1156}{400}$	$\frac{102x-204}{400}$	$\frac{18x}{400}$	$\frac{120x-1360}{400} = \frac{3x-34}{10}$

3- Exprimer l'espérance  $E(G)$  de la variable aléatoire  $G$  en fonction de  $x$ .

$$E(G) = \sum g_i p_i = \frac{3x-34}{10}$$

4- Pour quelles valeurs de  $x$  a-t-on  $E(G) > 0$  ?

$E(G) > 0$  donc  $3x - 34 > 0$  et par suite  $x > \frac{34}{3}$

**Conclusion :**  $S = ]\frac{34}{3}, +\infty[$

Remarque :  $\frac{34}{3} \approx 11,3$  donc pour que le jeu soit favorable au joueur, il faut un gain soit au moins de 12€.

**Exercice 2 :**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par:  $f(x) = x - 2 + e^{-x}$ . On nomme  $\mathcal{C}$  sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1- a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Montrer que la courbe  $\mathcal{C}$  admet en  $+\infty$  une droite asymptote  $D$  d'équation  $y = x - 2$ .

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \end{cases}$$

donc étude des branches infinies

Soit  $D$  la droite d'équation  $y = x - 2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y_D) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((x - 2 + e^{-x}) - (x - 2)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

**Conclusion :** la droite  $D$  d'équation  $y = x - 2$  est asymptote à  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$

Étudier la position relative de  $\mathcal{C}$  et  $D$  revient à étudier le signe de  $f(x) - y_D = e^{-x}$

Or  $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$

**Conclusion :**  $\mathcal{C}$  est au-dessus de  $D$ .

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  puis  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Que pouvez-vous dire sur le comportement asymptotique de la courbe de  $f$  en  $-\infty$  ?

Pour enlever la forme indéterminée en  $-\infty$ , je factorise par le terme prépondérant :  $e^{-x}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x - 2 + e^{-x} = x - 2 + \frac{1}{e^x} = \frac{xe^x - 2e^x + 1}{e^x}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - 2e^x + 1) = 1 \end{cases} \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \text{ (croissances comparées)} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2e^x + 1) = 1 \end{cases}$$

donc étude des branches infinies

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{xe^x} (xe^x - 2e^x + 1)$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{xe^x} = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0^- \text{ (croissances comparées)} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - 2e^x + 1) = 1 \end{cases}$$

**Conclusion :**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

$\mathcal{C}$  admet une branche parabolique de direction  $(Oy)$  en  $-\infty$

2- Calculer  $f'(x)$  pour tout réel  $x$ . Dresser le tableau des variations de  $f$  en y faisant figurer les limites en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme de fonctions dérivables

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 - e^{-x}$$

Pour étudier le signe de  $1 - e^{-x}$ , je vais résoudre une inéquation, par exemple  $1 - e^{-x} \geq 0$

$$1 - e^{-x} \geq 0$$

$$e^{-x} \leq 1$$

$-x \leq 0$  car  $x \mapsto \ln(x)$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$

$$x \geq 0$$

d'où le tableau de variations de  $f$

$x$	$-\infty$	$\beta$	$0$	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$		-	$0$	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\swarrow$	$\nearrow$	$+\infty$

$\theta$                        $\theta$

$-1$

$$f(0) = 0 - 2 + e^0 = -2 + 1 = -1.$$

3- Justifier que  $\mathcal{C}$  coupe l'axe des abscisses en exactement deux points d'abscisses  $\alpha$  et  $\beta$ , le premier étant positif, le deuxième étant négatif.

On donne  $e \approx 2,7$ . Prouver que  $\alpha \in ]1,2[$ .

La question revient à montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet deux solutions sur  $\mathbb{R}$ . Pour cela, on va appliquer le théorème de la bijection deux fois.

□ **Étude sur  $] -\infty ; 0 ]$**

$f$  est continue sur  $\mathbb{R}^-$  car dérivable

$f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}^-$  ( voir tableau de variations)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ et } f(0) = -1$$

donc  $f$  réalise donc une bijection de  $\mathbb{R}^-$  sur  $f(\mathbb{R}^-) = [ -1 ; +\infty [$

De plus  $0 \in [ -1 ; +\infty [$

**Donc l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\beta \in \mathbb{R}^-$**

□ **Étude sur  $[ 0 ; +\infty [$**

$f$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  car dérivable

$f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}^+$  ( voir tableau de variations)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } f(0) = -1$$

donc  $f$  réalise donc une bijection de  $\mathbb{R}^+$  sur  $f(\mathbb{R}^+) = [ -1 ; +\infty [$

De plus  $0 \in [ -1 ; +\infty [$

**Donc l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ .**

De plus  $f(1) = -1$  et  $f(2) = 2 - 2 + e^{-2} = e^{-2}$   
D'où  $f(1) < 0$  et  $f(2) > 0$  donc  $\alpha \in ]1 ; 2[$

**Conclusion :**  $\mathcal{C}$  coupe l'axe des abscisses en exactement deux points d'abscisses  $\alpha$  et  $\beta$ , le premier étant positif, le deuxième étant négatif. De plus  $\alpha \in ]1, 2[$ .

---

4- Tracer l'allure de  $\mathcal{C}$  et  $D$ . On donne  $\alpha \approx 1,84$  et  $\beta \approx -1,14$ .

