

CORRECTION DS N°04

Exercice 1 :

Soit (p_n) la suite définie par $p_1 = 0,1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$

1- Montrer que $p_2 = 0,62$.

$$\text{pour } n = 1, p_2 = \frac{1}{5}0,1 + \frac{3}{5} = 0,20,1 + 0,6 = 0,02 + 0,6 = 0,62$$

Conclusion : $p_2 = 0,62$.

2- a) Déterminer le réel x tel que $x = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$

$$x = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$$

$5x = x + 3$ après mise au même dénominateur

$$4x = 3$$

$$x = \frac{3}{4}$$

Conclusion : $x = \frac{3}{4} = 0,75$

b) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = p_n - x$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique

Méthode 1: par soustractions des lignes

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$$

$$x = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$$

en soustrayant les lignes il vient : $p_{n+1} - x = \frac{1}{5}(p_n - x)$

$$\text{donc } v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$$

Méthode 2: en remplaçant x

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = p_{n+1} - x = \left(\frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}\right) - \left(\frac{1}{5}x + \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{5}p_n - \frac{1}{5}x = \frac{1}{5}(p_n - x) = \frac{1}{5}v_n$$

Méthode 3: en utilisant les "5 lignes"

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = p_{n+1} - \frac{3}{4} \text{ car } x = \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5} - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{5}p_n - \frac{3}{20}$$

$$= \frac{1}{5}\left(p_n - \frac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{5}v_n$$

Conclusion : (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ et de premier terme v_1

avec $v_1 = p_1 - 0,75 = 0,1 - 0,75 = -0,65$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = v_1 \times q^{n-1} = (-0,65) \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}.$$

c) Déterminer l'expression de p_n en fonction de n .

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = v_n + \frac{3}{4} = (-0,65) \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{3}{4}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = (-0,65) \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{3}{4}$

3- Compléter les deux programmes Python qui demande n à l'utilisateur et qui affiche p_n

Méthode 1 : en utilisant $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$ et $p_1 = 0,1$

```
# programme 1
n=int(input('n='))
p=0.1 #p1
for i in range(2,n+1) :
    p=1/5*p+3/5
print('p=',p)
```

Méthode 2 : en utilisant $p_n = (-0,65) \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{3}{4}$

```
# programme 2
n=int(input('n='))
p=(-0.65)*(1/5)**(n-1)+3/4
print('p=',p)
```

4- Déterminer la limite de la suite (p_n) .

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = (-0,65) \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{3}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{3}{4} \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0 \quad \left(-1 < \frac{1}{5} < 1\right)$$

5- Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$ par le calcul

On donne $\frac{7 \ln(10)}{\ln(5)} \approx 10,01$

$$\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$$

$$\frac{3}{4} - (-0,65) \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} - \frac{3}{4} < 10^{-7}$$

$$0,65 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} < 10^{-7}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} < \frac{10^{-7}}{0,65}$$

$$\ln\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} < \ln\left(\frac{10^{-7}}{0,65}\right) \text{ car } x \mapsto \ln(x) \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$(n-1)\ln\left(\frac{1}{5}\right) < \ln\left(\frac{10^{-7}}{0,65}\right)$$

$$n-1 > \frac{\ln\left(\frac{10^{-7}}{0,65}\right)}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)} \text{ car } \ln\left(\frac{1}{5}\right) < 0 \text{ en effet } 0 < \frac{1}{5} < 1$$

$$n > \frac{\ln\left(\frac{10^{-7}}{0,65}\right)}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)} + 1$$

$$\text{et } \frac{\ln\left(\frac{10^{-7}}{0,65}\right)}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)} + 1 \approx 10,36$$

Conclusion : le plus petit entier naturel n tel que : $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$ est 11

Exercice 2 :

Un industriel fabrique des tablettes de chocolat. Pour promouvoir la vente de ces tablettes, il décide d'offrir des places de cinéma dans la moitié des tablettes mises en vente. Parmi les tablettes gagnantes, 60% permettent de gagner exactement une place de cinéma et 40% exactement deux places de cinéma.

1- Un client achète une tablette de chocolat.

On considère les événements suivants :

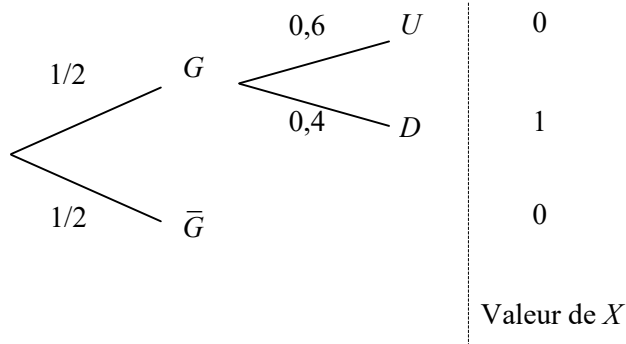
G : « Le client achète une tablette gagnante » ;

U : « Le client gagne exactement une place de cinéma » ;

D : « Le client gagne exactement deux places de cinéma ».

a) Donner $P(G)$, $P_G(U)$ et $P_G(D)$.

Établissons un arbre pondéré de la situation



Conclusion : $P(G)=0,5$, $P_G(U)=0,6$ et $P_G(D)=0,4$

b) Montrer que la probabilité de gagner exactement une place de cinéma est égale à $0,3$.

$$P(U) = P(U \cap G) = P(G)P_G(U) = \frac{1}{2} \times 0,6 = \frac{0,6}{2} = 0,3$$

Conclusion : la probabilité de gagner exactement une place de cinéma est égale à $0,3$

c) Soit X le nombre de places de cinéma gagnées par le client.

- Déterminer la loi de probabilité de X .

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

$$P(X=0) = P(\bar{G}) = 0,5$$

$$P(X=1) = P(U \cap G) = 0,3$$

$$P(X=2) = P(D \cap G) = P(G)P_G(D) = \frac{1}{2} \times 0,6 = \frac{0,4}{2} = 0,2$$

d'où la loi de X

x_i	0	1	2	total
p_i	0,5	0,3	0,2	1
$x_i p_i$	0	0,3	0,4	0,7
$x_i^2 p_i$	0	0,3	0,8	1,1

- Calculer l'espérance mathématique de la loi de X .

$$E(X) = \sum x_i p_i = 0,7$$

- Calculer la variance de X

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1,1 - (0,7)^2 = 1,1 - 0,49 = 0,61$$

- Déterminer la fonction de répartition et la représenter graphiquement

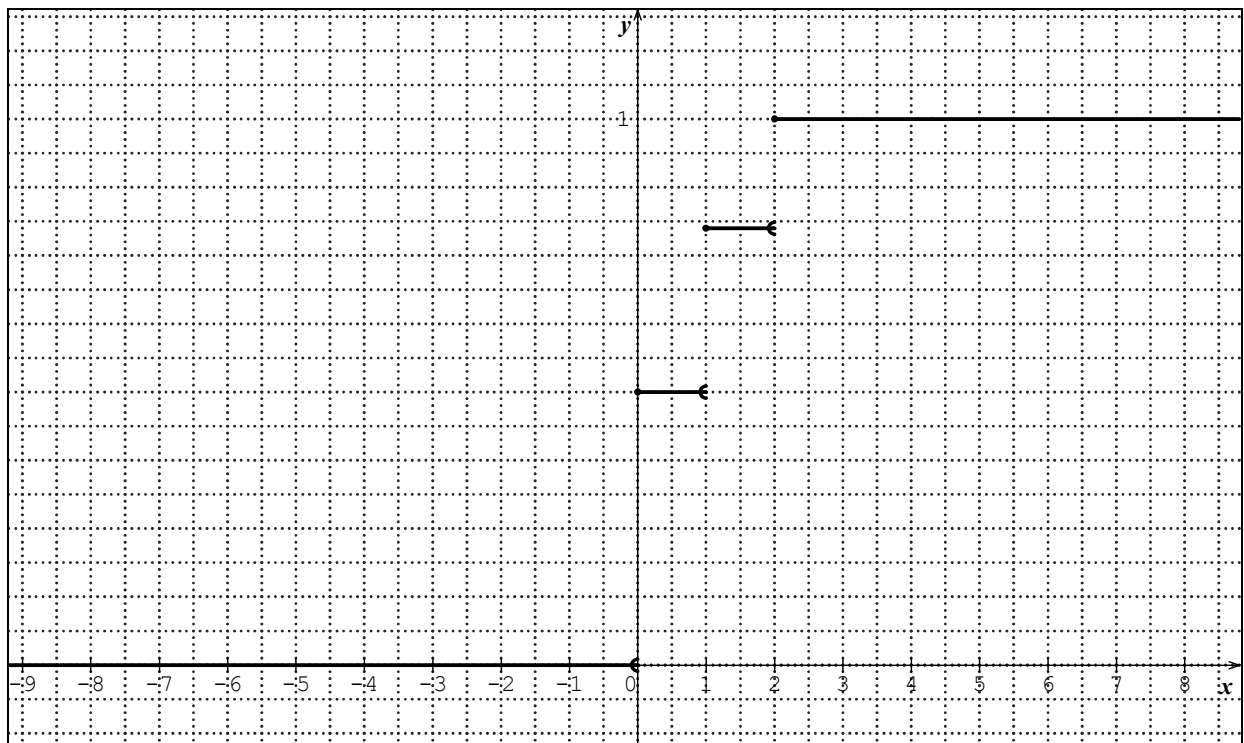
$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = p(X \leq x)$$

$$\text{si } x < 0 \quad \text{alors } F(x) = 0$$

$$\text{si } 0 \leq x < 1 \quad \text{alors } F(x) = P(X=0) = 0,5$$

$$\text{si } 1 \leq x < 2 \quad \text{alors } F(x) = P(X=0) + P(X=1) = 0,5 + 0,3 = 0,8$$

$$\text{si } 2 \leq x \quad \text{alors } F(x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 0,5 + 0,3 + 0,2 = 1$$



2- Un client achète deux jours de suite une tablette de chocolat. Les deux achats sont indépendants.

On note Z_k l'événement : " obtenir aucune place de cinéma lors du $k^{\text{ième}}$ achat "

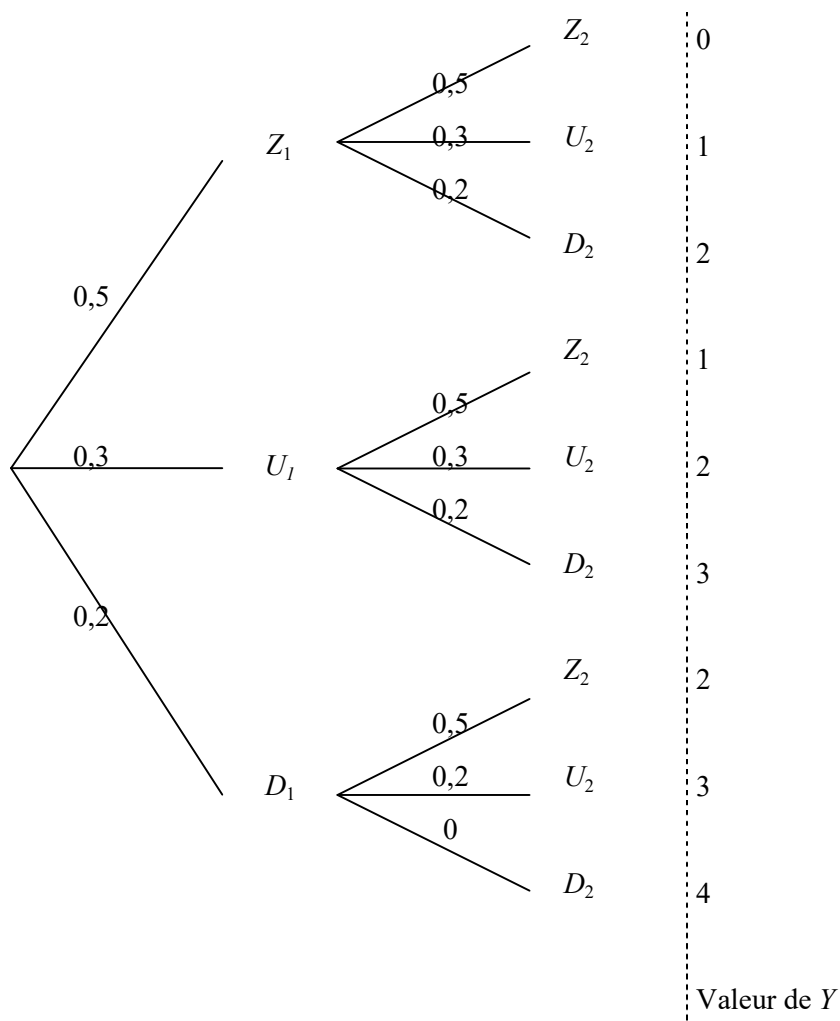
On note U_k l'événement : " obtenir une place de cinéma lors du $k^{\text{ième}}$ achat "

On note D_k l'événement : " obtenir deux places de cinéma lors du $k^{\text{ième}}$ achat "

On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de places gagnées lors des deux achats

a) Déterminer $Y(\Omega)$

Établissons un arbre pondéré de la situation



Les probabilités sont identiques car les achats sont indépendants

Conclusion : $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

b) Vérifier que $P(Y = 2) = 0,29$

$$\begin{aligned}
 P(Y = 2) &= P((Z_1 \cap D_2) \cup (U_1 \cap U_2) \cup (D_1 \cap Z_2)) \\
 &= P(Z_1 \cap D_2) + P(U_1 \cap U_2) + P(D_1 \cap Z_2) \quad \text{car } (Z_1 \cap D_2) \cap (U_1 \cap U_2) \cap (D_1 \cap Z_2) = \emptyset \\
 &= P(Z_1)P(D_2) + P(U_1)P(U_2) + P(D_1)P(Z_2) \quad \text{car les achats sont indépendants} \\
 &= 0,5 \times 0,2 + 0,3 \times 0,3 + 0,2 \times 0,5 \\
 &= 0,1 + 0,09 + 0,1 \\
 &= 0,29
 \end{aligned}$$

Conclusion : $P(Y = 2) = 0,29$

c) Déterminer la loi de Y

$$\begin{aligned} P(Y=0) &= P(Z_1 \cap Z_2) \\ &= P(Z_1)P(Z_2) \text{ car les achats sont indépendants} \\ &= 0,5 \times 0,5 \\ &= 0,25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y=1) &= P((Z_1 \cap U_2) \cup (U_1 \cap Z_2)) \\ &= P(Z_1 \cap U_2) + P(U_1 \cap Z_2) \text{ car } (Z_1 \cap U_2) \cap (U_1 \cap Z_2) = \emptyset \\ &= P(Z_1)P(U_2) + P(U_1)P(Z_2) \text{ car les achats sont indépendants} \\ &= 0,5 \times 0,3 + 0,3 \times 0,5 \\ &= 0,15 + 0,15 \\ &= 0,3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y=3) &= P((D_1 \cap U_2) \cup (U_1 \cap D_2)) \\ &= P(D_1 \cap U_2) + P(U_1 \cap D_2) \text{ car } (D_1 \cap U_2) \cap (U_1 \cap D_2) = \emptyset \\ &= P(D_1)P(U_2) + P(U_1)P(D_2) \text{ car les achats sont indépendants} \\ &= 0,2 \times 0,3 + 0,3 \times 0,2 \\ &= 0,06 + 0,06 \\ &= 0,12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y=4) &= P(D_1 \cap D_2) \\ &= P(D_1)P(D_2) \text{ car les achats sont indépendants} \\ &= 0,2 \times 0,2 \\ &= 0,04 \end{aligned}$$

D'où la loi de Y

y_i	0	1	2	3	4	total
p_i	0,25	0,3	0,29	0,12	0,04	1

Exercice 3 :

Calculer les limites des fonctions suivantes au point donné:

1- $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1}$ en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2- $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1}$ en 1

signe de $(x - 1)$: $\xrightarrow{\quad - \quad \oplus \quad + \quad}$
1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - x - 2) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) = 0^- \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - x - 2) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 0^+ \end{cases}$$

3- $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x-2}$ en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

4- $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{-x^2+4x-3}$ en 3

On est face à une FI du type 0/0 donc je factorise par (x-3)

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(-x+1)} = \frac{4}{1-3} = -2 \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -2$$

5- $f(x) = x^3 \ln(x)$ en 0^+

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ limite de référence

6- $f(x) = e^{x^2+1}$ en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2+1) = +\infty \\ \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty \end{cases}$$

7- $f(x) = e^{x^2+1}$ en 0

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

8- $f(x) = e^{-x+1}$ en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x+1) = -\infty \\ \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0 \end{cases}$$

9- $f(x) = \frac{x-2}{x-\ln(x)}$ en 0^+

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-2) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-\ln(x)) = +\infty \end{cases}$$

10- $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x}$ en $+\infty$

$$f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3} \times \frac{x+3}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+3)}{x+3} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u)}{u} = 0 \text{ croissances comparées} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \end{cases}$$

$$11- f(x) = \frac{x-2}{x-\ln(x)} \text{ en } +\infty$$

Pour enlever la forme indéterminée, je factorise par x au dénominateur

$$f(x) = \frac{x-2}{x\left(1-\frac{\ln(x)}{x}\right)} = \frac{x-2}{x} \times \frac{1}{1-\frac{\ln(x)}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\frac{\ln(x)}{x}} = 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ croissances comparées} \end{cases}$$

$$12- f(x) = \frac{e^x+x-1}{\ln(x)+x^2} \text{ en } +\infty$$

Pour enlever la forme indéterminée, je factorise par e^x au numérateur et x^2 au dénominateur

$$f(x) = \frac{e^x\left(1+\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right)}{x^2\left(\frac{\ln(x)}{x^2}+1\right)} = \frac{e^x}{x^2} \times \frac{1+\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}}{\frac{\ln(x)}{x^2}+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1+\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right) = 1 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ croissance comparées} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x^2}+1\right) = 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0 \text{ croissances comparées}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \text{ croissances comparées} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}}{\frac{\ln(x)}{x^2}+1} = 1 \end{cases}$$

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = 4-x-2e^{-x}$. On note \mathcal{C} sa courbe représentative.

1- Déterminer l'ensemble de définition de f

$$Df = \mathbb{R}$$

2- a) Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (4-x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty \\ \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0 \end{cases} \end{cases}$$

L'étude des branches infinies sera faite à la question suivante

b) Montrer que la droite D d'équation $y = -x + 4$ est asymptote à la courbe \mathcal{C} .
 $f(x) - y_D = 4 - x - 2e^{-x} - (-x + 4) = 4 - x - 2e^{-x} + x - 4 = -2e^{-x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y_D) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2e^{-x} = 0$$

Conclusion : D est asymptote à la courbe \mathcal{C} en $+\infty$.

c) Préciser la position relative de \mathcal{C} et D .

Étudier la position relative de \mathcal{C} et D revient à étudier le signe $f(x) - y_D = -2e^{-x}$

$\forall x \in Df, e^{-x} > 0$ et par suite $-2e^{-x} < 0$ donc \mathcal{C} est en dessous de D

Conclusion : \mathcal{C} est en dessous de D

3- a) Vérifier que, pour tout nombre réel x , $f(x) = \frac{4e^x - xe^x - 2}{e^x}$

$$\forall x \in Df, f(x) = 4 - x - 2e^{-x} = 4 - x - \frac{2}{e^x} = \frac{4e^x - xe^x - 2}{e^x}$$

Conclusion : $\forall x \in Df, f(x) = \frac{4e^x - xe^x - 2}{e^x}$

b) En déduire la limite de f lorsque x tend vers $-\infty$.

Pour calculer la limite de $f(x)$ en $-\infty$ j'utilise l'expression de $f(x)$ de la question précédente

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (4e^x - xe^x - 2) = -2 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 4e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \text{ croissances comparées} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -2 = -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (4e^x - xe^x - 2) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \end{cases}$$

Étude des branches infinies.

4- Donner le sens de variation de f . puis dresser le tableau de variations de f .

$$\forall x \in Df, f(x) = 4 - x - 2e^{-x}$$

f est dérivable sur Df comme somme de fonctions dérivables

$$\forall x \in Df, f'(x) = -1 - 2(-e^{-x}) = -1 + 2e^{-x}$$

Pour étudier le signe de $-1 + 2e^{-x}$, je vais résoudre une inéquation, par exemple $-1 + 2e^{-x} \geq 0$

$$-1 + 2e^{-x} \geq 0$$

$$2e^{-x} \geq 1$$

$$e^{-x} \geq \frac{1}{2}$$

$$-x \geq \ln\left(\frac{1}{2}\right) \text{ car } x \mapsto \ln(x) \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$-x \geq -\ln(2)$$

$$x \leq \ln(2)$$

d'où le signe de $-1+2e^{-x}$: $\xrightarrow{\quad + \quad \oplus \quad - \quad}$
 $\ln(2)$

D'où le tableau de variations de f

x	$-\infty$	β	$\ln(2)$	α	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		0	$3-\ln(2)$	0	

$$f(\ln(2)) = 4 - \ln(2) - 2e^{-\ln(2)} = 4 - \ln(2) - \frac{2}{e^{\ln(2)}} = 4 - \ln(2) - \frac{2}{2} = 3 - \ln(2)$$

5- Étudier la convexité de f

f' est dérivable sur Df comme somme de fonctions dérivables

$$\forall x \in Df, f''(x) = 2(-e^{-x}) = -2e^{-x}$$

$\forall x \in Df, e^{-x} > 0$ et par suite $-2e^{-x} < 0$ donc f est concave

Conclusion : f est concave sur \mathbb{R}

6- On note A le point de \mathcal{C} d'abscisse 0.

a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe \mathcal{C} au point A .

Une équation cartésienne de la tangente T à \mathcal{C} au point A d'abscisse 0 est donnée par

$$T: y = f'(0)(x-0) + f(0) \quad \text{avec } f'(0) = -1+2=1 \quad \text{et } f(0) = 4-0-2=2$$

Conclusion $T: y = 1(x-0) + 2 = x + 2$.

b) Déterminer la position relative de \mathcal{C} et T .

f est concave sur \mathbb{R} donc \mathcal{C} est en dessous T

7- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions sur \mathbb{R} noté α et β puis montrer que β appartient à l'intervalle $[-1, 0]$.

□ Étude sur $]-\infty, \ln(2)]$

f est continue sur $]-\infty, \ln(2)]$ car dérivable

f est strictement croissante sur $]-\infty, \ln(2)]$ d'après le tableau de variations

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et } f(\ln(2)) = 3 - \ln(2) \approx 2,3 \text{ donc } f(\ln(2)) > 0$$

donc f réalise donc une bijection de $]-\infty, \ln(2)]$ sur $f(]-\infty, \ln(2)]) =]-\infty, 3 - \ln(2)]$

De plus $0 \in]-\infty, 3 - \ln(2)]$

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\beta \in]-\infty, \ln(2)]$

De plus $f(-1) = 5 - 2e \approx -0,4$ (question 1) et $f(0) = 2$ (question 7)

D'où $f(-1) < 0$ et $f(0) > 0$ donc $\beta \in [-1, 0]$

□ Étude sur $[\ln(2), +\infty[$

f est continue sur $[\ln(2), +\infty[$ car dérivable

f est strictement décroissante sur $[\ln(2), +\infty[$ d'après le tableau de variations

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad f(\ln(2)) = 3 - \ln(2) \approx 2,3 \quad \text{donc} \quad f(\ln(2)) > 0$$

donc f réalise donc une bijection de $[\ln(2), +\infty[$ sur $f([\ln(2), +\infty[) =]-\infty, 3 - \ln(2)]$

De plus $0 \in]-\infty, 3 - \ln(2)]$

Donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in [\ln(2), +\infty[$

Conclusion : l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions sur \mathbb{R} noté α et β et β appartient à l'intervalle $[-1,0]$.

8- Tracer les droites T et D , et la courbe \mathcal{C} .

On admet que \mathcal{C} admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$

on donne $\alpha \approx 3,9$ et $\beta \approx -0,9$

