

CORRECTION DU DEVOIR N°15

Exercice 1

Un enfant joue avec 20 billes, 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 rouges et 3 vertes dans une boîte cubique et 3 rouges et 4 vertes dans une boîte cylindrique.

1- Dans un premier jeu, il choisit simultanément trois billes au hasard dans la boîte cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisies. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.

a) Déterminer la loi de probabilité de X .

Le choix se fait au hasard donc il y a équiprobabilité.

Le jeu consiste à choisir trois billes dans la boîte cubique **sans ordre ni remise parmi 13**.

$$\Omega = \{ \{ b_1, b_2, b_3 \} \mid \forall i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket, b_i \in \{13 \text{ billes} \} \}$$

$$\text{Donc } |\Omega| = \binom{13}{3} = \frac{13 \times 12 \times 11}{3 \times 2} = 13 \times 2 \times 11 = 286$$

X peut prendre pour valeurs: 0;1;2;3

- ◆ L'enfant tire 0 bille rouge donc tire 3 billes vertes parmi les 3 sans ordre ni remise soit $\binom{3}{3} = 1$ possibilité donc $P(X=0) = \frac{1}{286}$
- ◆ L'enfant tire 1 bille rouge donc tire 1 bille rouge parmi les 10 et 2 billes vertes parmi les 3 sans ordre ni remise soit $\binom{10}{1} \times \binom{3}{2} = 10 \times 3 = 30$ possibilités donc $P(X=1) = \frac{30}{286} = \frac{15}{143}$
- ◆ L'enfant tire 2 billes rouges donc tire 2 billes rouges parmi les 10 et 1 bille verte parmi les 3 sans ordre ni remise soit $\binom{10}{2} \times \binom{3}{1} = 45 \times 3 = 135$ possibilités donc $P(X=2) = \frac{135}{286}$
- ◆ L'enfant tire 3 billes rouges donc tire 3 billes rouges parmi les 10 sans ordre ni remise soit $\binom{10}{3} = 120$ possibilités donc $P(X=3) = \frac{120}{286} = \frac{60}{143}$

| | | | | | |
|-----------|-----------------|-----------------------------------|-------------------|------------------------------------|-----------------------------------|
| x_i | 0 | 1 | 2 | 3 | total |
| p_i | $\frac{1}{286}$ | $\frac{30}{286} = \frac{15}{143}$ | $\frac{135}{286}$ | $\frac{120}{286} = \frac{60}{143}$ | 1 |
| $x_i p_i$ | 0 | $\frac{30}{286}$ | $\frac{270}{286}$ | $\frac{360}{286}$ | $\frac{660}{286} = \frac{30}{13}$ |

b) Calculer l'espérance mathématique de X .

$$E(X) = \sum_i x_i p_i = \frac{660}{286} = \frac{30}{13} \approx 2,3 \text{ billes rouges.}$$

2- Un deuxième jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boîtes, puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard, dans la boîte choisie.

On considère les événements suivants :

C_1 : « l'enfant choisit la boîte cubique » ;

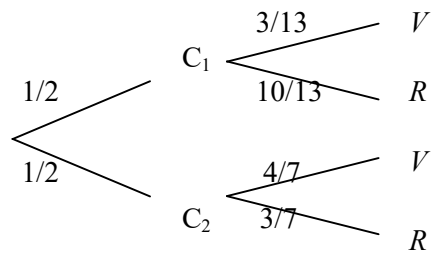
C_2 : « l'enfant choisit la boîte cylindrique » ;

R : « l'enfant prend une bille rouge » ;

V : « l'enfant prend une bille verte » .

a) Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à ce deuxième jeu.

Le choix de la boîte étant fait au hasard, on a $P(C_1) = P(C_2) = \frac{1}{2}$



b) Calculer la probabilité de l'événement R

C_1 et C_2 forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$P(R) = P(R \cap C_1) + P(R \cap C_2) = P(C_1) \times P_{C_1}(R) + P(C_2) \times P_{C_2}(R)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{10}{13} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{5}{13} + \frac{3}{21} = \frac{5 \times 21 + 3 \times 13}{13 \times 21} = \frac{109}{182}$$

Conclusion : $P(R) = \frac{109}{182}$.

c) Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique ?

$$P(R) = \frac{109}{182} \neq 0 \text{ donc } P_R(C_1) = \frac{P(R \cap C_1)}{P(R)} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{109}{182}} = \frac{5}{13} \times \frac{182}{109} = \frac{5 \times 13 \times 14}{13 \times 109} = \frac{70}{109}$$

Conclusion : la probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique sachant que l'enfant a choisi une bille rouge est $\frac{70}{109}$.

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1}$$

1- Écrire du script Python pour qu'il calcule u_n pour n entier naturel entré par l'utilisateur

```
n=int(input('n='))
u,v=0,1 #u0,u1
for k in range(2,n+1):
    u,v=v,7*v+8*u
print(v)
```

2- Montrer que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $s_n = u_{n+1} + u_n$ est une suite géométrique de raison 8.
En déduire l'expression de s_n en fonction de n .

$$\forall n \in \mathbb{N}, s_{n+1} = u_{n+2} + u_{n+1} = 7u_{n+1} + 8u_n + u_{n+1} = 8u_{n+1} + 8u_n = 8(u_{n+1} + u_n) = 8s_n$$

Conclusion : (s_n) est géométrique de raison 8 et de 1er terme $s_0 = u_1 + u_0 = 1 + 0 = 1$
donc $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = s_0 q^n = 1 \times 8^n = 8^n$

3- On pose pour tout entier naturel n : $v_n = (-1)^n u_n$ et $t_n = v_n - v_{n+1}$
(a) Exprimer t_n en fonction de s_n pour tout entier naturel n .

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, t_n &= v_n - v_{n+1} \\ &= (-1)^n u_n - (-1)^{n+1} u_{n+1} \\ &= (-1)^n u_n - (-1)(-1)^n u_{n+1} \\ &= (-1)^n u_n + (-1)^n u_{n+1} \\ &= (-1)^n (u_n + u_{n+1}) \\ &= (-1)^n s_n \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = (-1)^n s_n$

(b) En déduire que pour tout $n \geq 0$, on a $t_n = (-8)^n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, t_n = (-1)^n s_n = (-1)^n 8^n = (-1 \times 8)^n = (-8)^n$$

4- Soit n un entier naturel non nul.

(a) Calculer la somme $\sum_{i=0}^{n-1} (-8)^i$

Pour calculer $\sum_{i=0}^{n-1} (-8)^i$, on reconnaît la somme des termes de la suite géométrique (t_n) de raison -8

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} (-8)^i &= (-8)^0 \frac{1 - (-8)^{n-1-0+1}}{1 - (-8)} \text{ car } -8 \neq 1 \\ &= 1 \frac{1 - (-8)^n}{1 + 8} = \frac{1 - (-8)^n}{9} \end{aligned}$$

Conclusion : $\sum_{i=0}^{n-1} (-8)^i = \frac{1 - (-8)^n}{9}$

(b) Justifier que : $\sum_{i=0}^{n-1} (v_i - v_{i+1}) = -v_n$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} (v_i - v_{i+1}) &= (v_0 - v_1) + (v_1 - v_2) + \dots + (v_{n-2} - v_{n-1}) + (v_{n-1} - v_n) = v_0 - v_n = (-1)^0 u_0 - v_n \\ &= 0 - v_n = -v_n \end{aligned}$$

Conclusion : $\sum_{i=0}^{n-1} (v_i - v_{i+1}) = -v_n$

(c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n , puis vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^{n+1} + 8^n}{9}$

De $\sum_{i=0}^{n-1} (v_i - v_{i+1}) = -v_n$ il vient $\sum_{i=0}^{n-1} t_i = -v_n$

donc $v_n = -\sum_{i=0}^{n-1} t_i = -\frac{1-(-8)^n}{9} = \frac{-1+(-8)^n}{9}$ d'après la question 4a

De plus $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (-1)^n u_n$ donc $u_n = (-1)^n v_n$

et par suite $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n \frac{-1+(-8)^n}{9} = \frac{(-1)^n (-1)^1 + ((-1) \times (-8))^n}{9} = \frac{(-1)^{n+1} + 8^n}{9}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{-1+(-8)^n}{9}$ et $u_n = \frac{(-1)^{n+1} + 8^n}{9}$