

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
BILAN

- f est une fonction définie sur un intervalle I .
1. Si F est une primitive de f sur I , alors toutes les fonctions $x \mapsto F(x) + k$, où k est un réel quelconque, sont des primitives de f sur I .
 2. Si F et G sont deux primitives de f sur I , alors il existe un réel k tel que pour tout x de I , $G(x) = F(x) + k$.
 3. Soit x_0 un réel appartenant à I et y_0 un réel quelconque, il existe une primitive G et **une seule** de f telle que $G(x_0) = y_0$.

Remarque: Pour montrer qu'une fonction g est une primitive d'une fonction f , il suffit de dériver g et montrer que $g'=f$

2- PROPRIÉTÉ ADMISE

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

II- PRIMITIVES DES FONCTIONS USUELLES

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes :

$f(x) = 3$
.....
.....
.....
.....
.....

$f(x) = x$
.....
.....
.....
.....
.....

$f(x) = x^2$
.....
.....
.....
.....
.....

$f(x) = x^3$

$$f(x) = x^4$$

$$f(x) = 3x^5$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + x^3$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = e^x$$

On obtient des primitives de fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées. Dans les tableaux suivants, k désigne un réel quelconque.

En effet $(u^n)' = n u' u^{n-1}$ donc une primitive de $u' u^n$ est $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$

Fonction f définie par	Primitive F de f définie par	sur I
$f(x) = c$ (où c est une constante)		$I = \mathbb{R}$
$f(x) = x$		$I = \mathbb{R}$
$f(x) = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$)		$I = \mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}^*$ $I =]0 ; +\infty[$ ou $I =]-\infty ; 0[$ si $\alpha \in \mathbb{Z}^* / \{-1\}$
$f(x) = \frac{1}{x}$		$I =]0 ; +\infty[$ ou $I =]-\infty ; 0[$
$f(x) = e^x$		$I = \mathbb{R}$
$f(x) = e^{ax+b}$ avec $a \neq 0$		$I = \mathbb{R}$

Dans ce deuxième tableau, on note D_u le domaine de définition de la fonction u , et D_v celui de v .

Fonction f	Primitive de f	sur
Cu' où $k \in \mathbb{R}$		D_u
$u' + v'$		$D_u \cap D_v$
$u' \times u^\alpha$ $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$		D_u si $\alpha \in \mathbb{N}^*$ Les intervalles de $D_u \setminus \{x \text{ tels que } u(x) = 0\}$ si $\alpha \in \mathbb{Z}^* / \{-1\}$
$\frac{u'}{u}$		Les intervalles de $D_u \setminus \{x, u(x) \neq 0\}$
$u'e^u$		D_u

III- CALCULS DES INTÉGRALES

1- DÉFINITION

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ donc f admet des primitives sur $[a, b]$.
On note F **une primitive** de f

On définit le nombre $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Et on lit : “ somme de a à b de $f(x) dx$ ” ou “ intégrale de a à b de $f(x) dx$ ”.

Exemple 1 : calcul de $\int_1^2 x dx$

$x \mapsto x$ est

$$\int_1^2 x dx =$$

Exemple 2 : calcul de $\int_1^2 e^x dx$

$x \mapsto e^x$ est

$$\int_1^2 e^x dx =$$

Remarque 1 : $\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^a f(x) dx =$

Remarque 2 : $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x) dx$

Remarque 3 :

Si f est une fonction continue sur I et a un réel de I

Alors la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est **l'unique** primitive de f s'annulant pour $x = a$

Exemple : $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $]0 ; +\infty[$ alors on a $\forall x \in]0 ; +\infty[\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$

2- VALEUR MOYENNE

On appelle valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a, b]$,

le nombre $m(f)$ définie par $m(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

exemple :

Calculer la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ sur $[1 ; 3]$

3- RELATION DE CHASLES

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et c un réel appartenant à $[a, b]$

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Exemple 1 :

soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Calculer $\int_{-1}^3 f(x)dx$

Exemple 2 :

Calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^n dx$

4- LINÉARITÉ

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et k un réel alors

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x)dx$$

Exemple 1:

Calculer $\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$

Exemple 2:

Calculer $\int_0^1 7x^{n-1} dx$

IV- INTÉGRATION PAR PARTIES

1- RAPPEL

Soient u et v deux fonctions dérivables sur I alors

$$\forall x \in I, (u \times v)'(x) = \dots\dots\dots$$

$$\text{Donc } u(x)v'(x) = \dots\dots\dots$$

D'où la formule d'intégration par partie :

$$\forall a \in I \text{ et } \forall b \in I, \int_a^b u(x)v'(x)dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

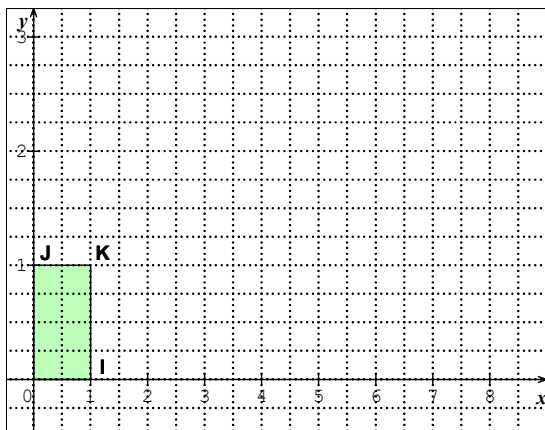
2- EXEMPLE

Calculer $\int_0^1 x e^x dx$

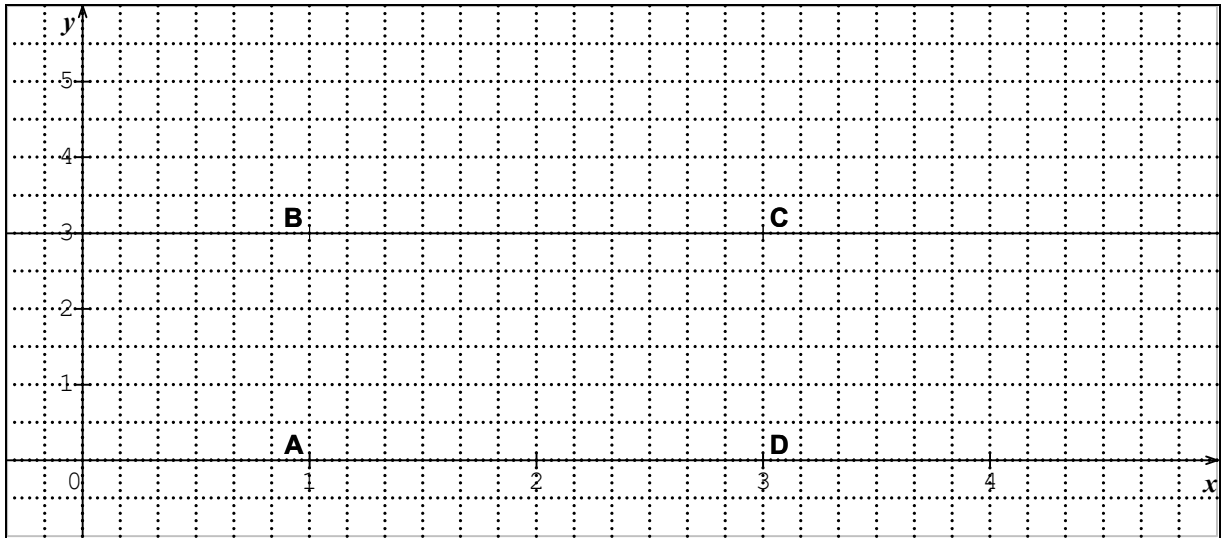
V- APPLICATIONS DU CALCUL INTÉGRAL

1- UNITÉ D'AIRE

On appelle unité d'aire (notée u.a) l'aire du rectangle $OIKJ$ construit a partir du repère
Ainsi si $OI = 1$ cm et $OJ = 2$ cm alors l'unité d'aire est $1 \times 2 = 2$ cm²



2- AIRE SOUS LA COURBE



L'unité choisie est sur l'axe des abscisses 3 cm et sur l'axe des ordonnées 1 cm

1.a) Calculer l'aire du rectangle $ABCD$ en u.a puis en cm^2

.....

b) Calculer $\int_1^3 3 \, dx$

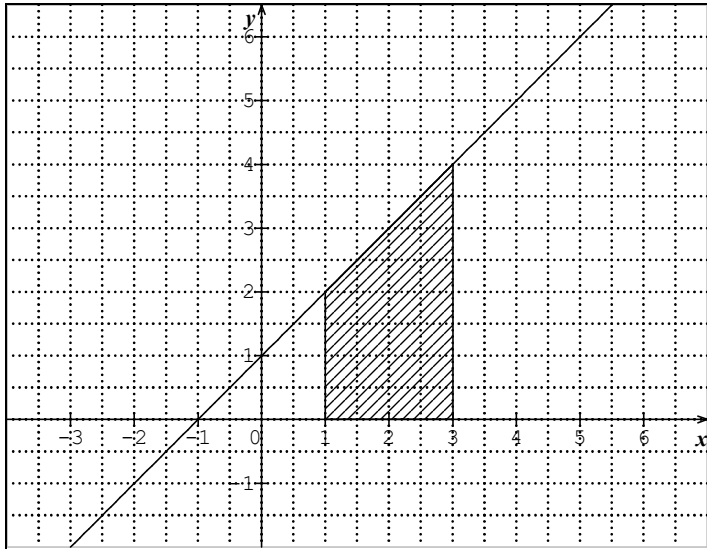
.....

2. a) Soit f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x + 1$

On a tracé la courbe représentant cette fonction dans un repère orthonormé.

(L'unité est le cm, l'unité d'aire est alors².)

a) Calculer l'aire de la figure hachurée puis $\int_1^3 f(x) \, dx$



b) Calculer l'aire de la figure hachurée puis $\int_{-3}^{-1} f(x)dx$

d'où les trois propriétés :

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$, f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a ; b]$, et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j})

➤ Si pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) \geq 0$, \mathcal{C} est au dessus de (Ox)
alors l'**aire**, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est $\int_a^b f(x)dx$

➤ Si pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) \leq 0$, \mathcal{C} est en dessous de (Ox)
alors l'**aire**, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est $-\int_a^b f(x)dx$

➤ Si pour tout x de $[a ; b]$, $f(x)$ n'est pas de signe constant
alors l'**aire**, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est

3- AIRE D'UN DOMAINE COMPRIS ENTRE DEUX COURBES

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j})

➤ Si $f(x) \geq g(x)$ sur $[a, b]$ alors \mathcal{C}_f estde \mathcal{C}_g
alors l'**aire**, en unités d'aire, du domaine compris entre les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g , et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$

➤ Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a, b]$ alors \mathcal{C}_f estde \mathcal{C}_g
alors l'**aire**, en unités d'aire, du domaine compris entre les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g , et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b (g(x) - f(x))dx$

➤ Si pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) - g(x)$ n'est pas de signe constant
alors l'**aire**, en unités d'aire, du domaine compris entre les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g , et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à

VI- INTÉGRALES ET RELATION D'ORDRE

1- POSITIVITÉ DE L'INTÉGRALE

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$

Si pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Conséquence :

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$

Si pour tout x de I , $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Exemples

$$\text{Soit } J = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$$

Sans chercher à calculer J démontrer que $0 \leq J \leq 1$

2- INTÉGRALE ET VALEUR ABSOLUE

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$