

CHAPITRE 2 : PROBABILITE

I- VOCABULAIRE

1- EXPÉRIENCE ALÉATOIRE¹

C'est une expérience dont on connaît **parfaitement** les conditions de déroulement et dont on ignore l'issue, le résultat dépend du hasard².

Exemples :

- 1) Si la pièce est équilibrée et n'est pas tombée sur la tranche, jeter une pièce et noter le résultat obtenu. Le résultat (aléatoire) est ici pile ou face.
- 2) Si le dé est non truqué et qu'il a 6 faces, lancer un dé et noter le résultat obtenu. Le résultat (aléatoire) est ici un entier compris entre 1 et 6.
- 3) Si le jeu est non truqué dans un jeu de 32 cartes, choisir au hasard 1 carte dans un jeu de trente-deux cartes. Le résultat est un sous-ensemble à 1 élément de l'ensemble des trente-deux cartes.
- 4) Si le jeu est non truqué dans un jeu de 32 cartes, choisir au hasard cinq cartes dans un jeu de trente-deux cartes. Le résultat est un sous-ensemble à cinq éléments de l'ensemble des trente-deux cartes.
- 5) Choisir un humain au hasard et noter sa taille. Le résultat est un nombre réel.
- 6) Lancer (successivement) trois dés non truqués à 6 faces et noter les résultats obtenus.
- 7) On considérera même parfois des expériences aléatoires qui sont, en pratique, impossible à réaliser. Par exemple : lancer un dé une infinité de fois et noter tous les résultats. Les résultats possibles sont ici les suites infinies $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ où chaque x_i est un entier compris entre 1 et 6.

2- INVENTAIRE (UNIVERS DES POSSIBLES).

L'inventaire ou l'univers est l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire. On le notera Ω .

Exemples :

$\Omega_1 =$

$\Omega_2 =$

$\Omega_3 =$

$\Omega_4 =$

$\Omega_5 =$

$\Omega_6 =$

¹ Aléatoire : vient du latin *alea*, qui signifie jeu de dés.

² Hasard : vient de l'arabe *az-zahr*, qui signifie le dé.

3- ÉVÉNEMENTS³

Un événement est une partie (sous-ensemble) de Ω .

On appelle événement élémentaire tout événement qui a un unique élément.

Décrire un événement, c'est citer l'ensemble des résultats issus de l'action ou de la situation qui lui correspond.

- Dans Ω_1 , il y a ... événements :
(.....est l'événement impossible ; est l'événement certain)
- Dans Ω_2 , on peut, par exemple, considérer l'événement, que nous noterons A .
 A = " Avoir une face paire ". L'événement A est réalisé lorsque le résultat est 2, 4 ou 6. On écrit alors $A = \{2 ; 4 ; 6\}$.
L'événement A = " Avoir une face paire " est la réunion des événements :
 A_1 = " avoir 2 ", A_2 = " avoir 4 ", A_3 = " avoir 6 ".
 A se décompose en A_1 ou A_2 ou A_3 et on note $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, et les événements A_1, A_2, A_3 sont élémentaires, car non décomposables en événements plus simples.

Propriétés

Soient A et B deux événements associés à une même expérience aléatoire.

- **L'événement contraire de A** , c'est à dire " non A ", est représenté par le complémentaire de A que l'on note $\overline{A}$.
- L'événement " **A et B sont réalisés**" est représenté par $A \cap B$.
- L'événement " **A ou B est réalisé**" est représenté par $A \cup B$.
- On dit que les événements **A et B sont incompatibles** s'ils ne peuvent pas être réalisés simultanément, c'est à dire si $A \cap B = \emptyset$.
- L'événement " **A est réalisé et B n'est pas réalisé**" est représenté par $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.
- On dit que A implique B , si la réalisation de A entraîne la réalisation de B , c'est à dire si $A \subset B$.

4- PONDÉRATION

Une pondération est une application notée p de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$.

La probabilité est le résultat de la pondération.

$$P: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0 ; 1]$$

$E \mapsto P(E)$

Probabilité de E (nombre)

de telle manière que P satisfasse les axiomes de Kolmogorov (mathématicien russe 1930)

- $P(\Omega) = 1$. C'est-à-dire que la probabilité de l'événement certain est égale à 1.
- Deux événements $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$.
Si $A \cap B = \emptyset$ Alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

³ Événements : vient du latin *evenire* qui veut dire arriver.



ATTENTION ! Une probabilité est par définition à valeurs dans $[0, 1]$.

Ainsi, pour tout événement $\mathcal{P}(\Omega)$, on a $0 \leq P(A) \leq 1$

On vérifie donc **SYSTEMATIQUEMENT** que le résultat d'un calcul de probabilité est un nombre compris entre 0 et 1.

Propriétés

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A \setminus B) = P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Exemples :

On joue avec un dé pipé à six faces. Les probabilités d'apparition de chaque face sont données par le tableau de répartition suivant : (on lance le dé une seule fois)

face	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,2	0,18	0,16	0,18	0,16	0,12

Pour chaque événement suivant, donner l'ensemble des résultats qui lui correspondent, puis sa probabilité.

- a) $E = \text{"obtenir la face 1"} = \{\dots\}$. $P(E) =$
- b) $A = \text{"obtenir une face paire"} = \{\dots\}$. $P(A) =$
- c) $B = \text{"obtenir une face de 1 à 6"} = \{\dots\}$. $P(B) =$
- d) $C = \text{"obtenir une face supérieure ou égale à 4"} = \{\dots\}$ $P(C) =$
- e) $A \cap C = \{\dots\}$. $P(A \cap C) =$
- f) $A \cup C = \{\dots\}$. $P(A \cup C) =$
- g) $J = \text{"obtenir un des chiffres 4 2 1"} = \{\dots\}$ $P(J) =$
- h) $L = \text{"obtenir aucun des chiffres 4 2 1"} = \{\dots\}$ $P(L) =$
- i) $K = \text{"n'obtenir ni 1 ni 6"} = \{\dots\}$ $P(K) =$

II- ÉQUIPROBABILITÉ

1- DÉFINITION

Lorsqu'à l'issue d'une action tous les événements élémentaires ont la même chance d'apparaître, alors il y a équiprobabilité (égale-probabilité).

Exemples :

- ♦ Le jet d'une pièce de monnaie, avec les événements "obtenir le côté PILE" et "obtenir le côté FACE".
- ♦ Interroger une personne **au hasard, indifféremment**, de **façon aléatoire**
- ♦ Tirer une boule parmi 6 boules **indiscernables** au toucher.
- ♦ Prendre un nombre entier **quelconque** d'un jeu bien battu sans tricher.
- ♦ Jouer avec un dé **non pipé**.

Tous les mots en gras indiquent **une situation d'équiprobabilité**.

2- THÉORÈME

Soit E une expérience aléatoire et Ω son inventaire.

$\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

On dit qu'il y a équiprobabilité si et seulement si tous les événements élémentaires ont la même probabilité ie $P(\{a_1\}) = P(\{a_2\}) = \dots = P(\{a_n\}) = \frac{1}{n}$.



S'il y a équiprobabilité alors :
$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Exemples :

1- Dans un jeu de 32 cartes, bien battu, on tire une seule carte au hasard.

Quelle est la probabilité (en fraction irréductible) de tirer :

a) Le roi de cœur ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

b) Un as ?

.....

.....

.....

.....

c) Un valet ou une dame ?

.....

.....

.....

d) Un roi et une dame ?

.....

.....

.....

2- Dans une classe de 38 élèves, 26 apprennent l'espagnol, 15 l'allemand dont 8 également l'espagnol.

- a)** Quel est le nombre d'élèves qui n'apprennent aucune de ces langues ?
- b)** On rencontre un de ces élèves par hasard. Quelle est la probabilité pour que cet élève soit un germaniste non hispanisant ? Ne soit ni germaniste, ni hispanisant ?