CHAPITRE 5 :
EQUATIONS - INEQUATIONS (2)

I- POLYNÔMES

1- DÉFINITION D'UN POLYNÔME

On appelle fonction polynomiale réelle en x ou simplement polynôme réel en x une expression de la forme $a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ avec a_0 , a_1 , ... , a_n appartenant aux nombres réels , $a_n \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$

Exemples :
$x^2 + 3x + 1$ ……

$x^{-2} + x - 1$ ……

$\sqrt{x} + 3$ ……

Remarque :
Les nombres a_0 , a_1 , ... , a_n sont appelés les coefficients du polynôme.

2- DEGRÉ D'UN POLYNÔME

Soit P un polynôme en x,
On appelle degré de P , le plus grand exposant (la plus grande puissance) de x.

Exemples : $P(x) = x^2 + 3x + 1$ est un polynôme de degré ……

$P(x) = 7$ est un polynôme de degré ……

$P(x) = 3x+1$ est un polynôme de degré ……

$P(x) = 0$ est un polynôme de degré ……

Remarque :
Le polynôme de degré 0 est une ……

Le polynôme de degré 1 est une fonction affine $P(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$.

Le polynôme de degré 2 est une fonction $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$
où a est le coefficient de x^2
b est le coefficient de x
c est le terme constant

3- RACINE D'UN POLYNOME

Si le nombre a est solution de l'équation $P(x)=0$ alors a est appelé racine (ou zéro) du polynôme P.

Exemple : 1 est racine du polynôme P définie par $P(x) = x^3+3x-3x-1$.

Remarque: on appelle racine évidentes les nombres 0, 1, -1, 2, -2 et 3, -3

4- ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

On désire résoudre $ax^2 + bx + c = 0$
On commence par déterminer l'ensemble de définition
Puis on calcule le discriminant $\boldsymbol{\Delta = b^2-4ac}$

	Nombre de solutions	Les solutions	Factorisation de $P(x)$
$\Delta > 0$			
$\Delta = 0$			
$\Delta < 0$			

Exemple : Soit $P(x) = 2x^2 + x - 1$

1– Résoudre l'équation $P(x) = 0$

$2x^2 + x - 1 = 0$

$a =$ $b =$ et $c =$

$\Delta = b^2 - 4ac = (\quad)^2 - 4\times\quad\times(\quad) =$

Δ 0 donc l'équation admet

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} =$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} =$

2– Factoriser le polynôme P

Les solutions de $2x^2 + x - 1 = 0$ sont

d'où $P(x) =$

Ne pas oublier

Remarque :Trouver la deuxième racine quand on en connaît une

$132x^2+23x-109=0$

On remarque que …….. est racine évidente

donc $132x^2+23x-109=$

et par suite la deuxième racine est

II- ÉQUATIONS DE DEGRÉ SUPÉRIEUR OU ÉGAL À 3

1- THÉORÈME FONDAMENTAL

Soit $P(x)$ un polynôme de degré n
Si a est une racine de P alors $P(x)$ se factorise par $(x-a)$ autrement dit
Il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-a)\,Q(x)$

Exemple

1 est racine du polynôme $P(x)=5x^3+7x^2-11x-1$

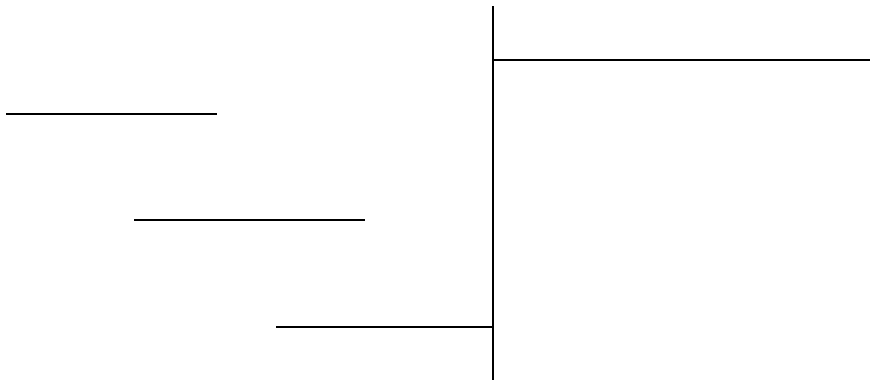
Donc il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-1)\,Q(x)$.

2- DÉTERMINATION DE $Q(x)$

Il existe différentes méthodes pour déterminer le polynôme Q(x) :

- Division euclidienne,
- Méthode par identification,
- Méthode HORNER,

a) Division euclidienne



Donc $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $5x^3+7x^2-11x-1 =$ ……

b) Méthode d'identification

$P(x) = 5x^3+7x^2-11x-1$

Donc il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x - 1)\, Q(x)$

$Q(x)$ sera un polynôme de degré …… i.e. $Q(x) =$ ……

Donc $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $5x^3+7x^2-11x-1 = (x - 1)$

(a,b,c) sont solutions du système

Donc $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $5x^3+7x^2-11x-1 = (x-1)$

Remarque : méthode d'identification de tête

$5x^3+7x^2-11x-1 = (x-1)$ .....

donc il ne reste plus qu'à déterminer b en utilisant les termes de degré 2 ou 1 (au choix)

c) Méthode de HÖRNER

$P(x) = 5x^3+7x^2-11x-1$
Donc il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-1)\,Q(x)$

Pour déterminer $Q(x)$, nous allons utiliser cette fois la méthode de HORNER qui est plus rapide.

Coefficients de P(x)				
Racine de P(x) : **1**				
Coefficients de Q(x)				

Donc $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $5x^3+7x^2-11x-1 = (x-1)$

III- INÉQUATIONS

1- INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRE

a) Rappels

- Une inéquation est inchangée si on ajoute ou si on soustrait à droite et à gauche le même nombre.
- Une inéquation est inchangée si on multiplie ou si on divise à droite et à gauche le même nombre positif.
- Une inéquation change si on multiplie ou si on divise à droite et à gauche le même nombre négatif.
- Le produit en croix est interdit

b) Tableau de signes d'une fonction affine

$f(x) = ax + b$

Donc le tableau d'étude de signes de f est

Valeur qui annule $ax + b$

x	$-\infty$	$-b/a$	$+\infty$
$f(x)$		0	

ou axe

Exemple : Etudier le signe de la fonction affine définie par $f(x) = 2x + 3$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	0	

ou axe :

2- INÉQUATIONS DU SECOND DEGRE

	Nombre de solutions	Tableau d'étude de signes	
$\Delta > 0$		x	$-\infty$ $+\infty$
		$P(x)$	
$\Delta = 0$		x	$-\infty$ $+\infty$
		$P(x)$	
$\Delta < 0$		x	$-\infty$ $+\infty$
		$P(x)$	

Exemple : Résoudre $2x^2 + x - 1 > 0$

Méthode

1. **Déterminer l'ensemble de définition**
2. **Résoudre l'équation**
3. **Faire un tableau de signes**
4. **Conclure**

1. Ensemble de définition

2. Résolution de l'équation $2x^2 + x - 1 = 0$

Les solutions de $2x^2 + x - 1 = 0$ sont $x_1 =$ et $x_2 =$

2. Tableau d'étude de signes

x	$-\infty$ $+\infty$
$2x^2 + x - 1$	

ou axe

3. Conclusion

3- INÉQUATIONS DE DEGRÉ SUPÉRIEUR OU EGAL A 3

Résoudre $5x^3+7x^2-11x-1>0$

Méthode

1. **Déterminer l'ensemble de définition**
2. **Chercher une racine évidente**
3. **Factoriser le polynôme**
4. **Faire un tableau de signes**
5. **Conclure**