ECT1

TP 11: Dichotomie

Exercice 1 : **Révision**

1- On a la fonction Python suivante

```
def mystere(n) :
    u=n%10
    d=n//10
    return 10*u+d
```

a) Que renvoie `mystere(54)`

b) Quel est le rôle de cette fonction

2- On a la fonction Python suivante

```
def u(n) :
    if n==0 :
        return 2
    else :
        return 0.5*u(n-1)**2 -1
```

a) Que renvoie `u(0)` puis `u(1)`

b) Quel est le rôle de cette fonction

c) Écrire une fonction `Python` nommée u2 qui a le même rôle que la fonction précédente en utilisant une boucle

Présentation de la méthode

Comme f s'annule et change de signe, on a, en particulier, $f(a)\,f(b)<0$.

On considère $m=\dfrac{a+b}{2}$ le milieu du segment $[a,b]$. Alors, deux cas sont possibles :

- soit $f(a)\times f(m)\leq 0$ alors $f(a)$ et $f(m)$ sont de signes opposés. Comme f est continue, f doit s'annuler sur $[a,m]$ et donc $\alpha\in[a,m]$.
- soit $f(m)\times f(b)\leq 0$ alors $f(m)$ et $f(b)$ sont de signes opposés. Comme f est continue, f doit s'annuler sur $[b,m]$ et donc $\alpha\in[b,m]$.

On recommence alors le raisonnement précédent avec l'intervalle obtenu contenant α

On construit ainsi une suite d'intervalles $[a_n, b_n]$ contenant α

Pour cela, on définit trois suites $(a_n)_n$, $(b_n)_n$, et $(m_n)_n$

par $a_1=a$, $b_1=b$

et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $m_n=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ et

⇨ Si $f(a_n)\times f(m_n)\leq 0$ alors $a_{n+1}=a_n$ et $b_{n+1}=m_n$

⇨ Si $f(m_n)\times f(b_n)\leq 0$ alors $a_{n+1}=m_n$ et $b_{n+1}=b_n$

On admet que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent vers α.

La méthode de la dichotomie nous permet d'écrire que $\alpha\in\,]a_n, b_n[$.

On aura donc une meilleure approximation de α lorsque l'intervalle $]a_n, b_n[$ sera petit

La précision p de α est donnée par b_n-a_n .

<u>Exercice 2</u> : Premier exemple

On considère la fonction f définie par $f(x)=\ln(x)+x$

1- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$. De plus $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

2- Écrire une fonction `Python` qui définie f . On notera f cette fonction .

3- Écrire un script `Python` permettant d'encadrer α dans un intervalle d'amplitude 10^{-2}

Exercice 3 : encore un

On considère la fonction f définie par $f(x)=x^3+x+1$

1- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$. De plus $\alpha \in [-1, 0]$.

2- Écrire une fonction `Python` qui définie f . On notera f cette fonction .

3- Écrire un script `Python` permettant d'encadrer α dans un intervalle d'amplitude 10^{-2}