Concours Blanc N°1

Ex n°1

a] $2x = 0$

$\iff x = \frac{0}{2}$

$\iff \boxed{x = 0}$

b] $(x-3)(x^2+5) = 0$

$\iff \begin{cases} x-3=0 \\ \text{ou} \\ x^2+5=0 \end{cases}$

$\hookrightarrow a=1 \quad b=0 \quad c=5$

$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4\times1\times5 = -20 < 0$

Pas de racine

$\iff x-3=0$

$\iff \boxed{x=3}$

c] $x^2+x+3 = 2x-7$

$\iff x^2+x+3-2x+7=0$

$\iff x^2-x+10=0$

$a=1 \quad b=(-1) \quad c=10$

$\Delta = b^2-4ac = (-1)^2-4\times1\times10 = 1-40 = -39<0$

Pas de racine !

L'équation ne possède pas de solution.

d] $x-1 = \frac{4}{x-1} \iff \frac{(x-1)^{\times(x-1)}}{1_{\times(x-1)}} - \frac{4}{x-1} = 0$

$\iff \frac{(x-1)^2}{x-1} - \frac{4}{x-1} = 0$

$\iff \frac{x^2-2x+1}{x-1} - \frac{4}{x-1} = 0$

$\iff \frac{x^2-2x-3}{x-1} = 0$

$\iff \begin{cases} x^2-2x-3=0 \\ \text{et } x-1 \neq 0 \end{cases}$

$a=1 \quad b=-2 \quad c=-3$

$\Delta = b^2-4ac = (-2)^2-4\times1\times(-3)$

$= 4+12 = 16 > 0$

2 racines

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)-\sqrt{16}}{2\times1} = \frac{2-4}{2} = -1$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)+\sqrt{16}}{2\times1} = \frac{2+4}{2} = 3$

$\iff \begin{cases} x=-1 \text{ ou } x=3 \\ \text{et } \quad x \neq 1 \end{cases}$

$\iff x=-1 \text{ ou } x=3$

e] $(x-3)^2 = (x+1)^2 \iff (x-3)^2-(x+1)^2=0$

$\iff [(x-3)-(x+1)]\times[(x-3)+(x+1)]=0$

$\iff [x-3-x-1]\times[x-3+x+1]=0$

$\iff [-4]\times[2x-2]=0$

$\iff \begin{cases} -4=0 \longrightarrow \text{Impossible} \\ \text{ou} \\ 2x-2=0 \end{cases}$

$\iff 2x-2=0 \quad \iff x=1$

f] $5\sqrt{x} - x\sqrt{x} = 0 \iff \sqrt{x}(5-x) = 0$

$$\iff \begin{cases} \sqrt{x} = 0 \\ \text{ou} \\ 5 - x = 0 \end{cases}$$

$$\iff \boxed{\begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 5 \end{cases}}$$

Ex n°2 a] $f_1(x) = 7x^2 - 6x$ $\quad f_1$ est une fonction polynôme

donc $\boxed{Df_1 = \mathbb{R}}$

b] $f_2(x) = \sqrt{3x-6}$ Il faut que $3x - 6 \geq 0$ $\quad)+6$

$\iff 3x \geq 6$ $\quad)\div 3 \oplus$

$\iff x \geq \frac{6}{3}$

$\iff x \geq 2$

$\boxed{\text{Donc } Df_2 = [2 ; +\infty[}$

c] $f_3(x) = \frac{3x}{x^2+3}$ Il faut que $x^2+3 \neq 0$

↳ On résout $x^2+3=0$

$a=1 \quad b=0 \quad c=3$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 0^2 - 4 \times 1 \times 3 = -12 < 0$

Pas de racine.

(Donc x^2+3 ne s'annule jamais.)

$\boxed{\text{Donc } Df_3 = \mathbb{R}}$

d] $f_4(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$ Il faut que $\begin{cases} x \geq 0 \\ \text{et } 1 - x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ \text{et } -x \geq -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ \text{et } x \leq 1 \end{cases}$

Ainsi $D_{f_4} = [0;1]$

e] $f_5(x) = \sqrt{x^3 - x^2 + 2x - 2}$ Il faut que $\underbrace{x^3 - x^2 + 2x - 2}_{P(x)} \geq 0$

→ On cherche une racine évidente de P.

$$P(1) = 1^3 - 1^2 + 2 \times 1 - 2 = 0$$

→ Div. euclidienne :

$$\begin{array}{rl|l} & x^3 - x^2 + 2x - 2 & x - 1 \\ \cline{3-3} -(& x^3 - x^2) & x^2 + 2 \\ \cline{1-2} & 0 + 2x - 2 & \\ -(& 2x - 2) & \\ \cline{1-2} & 0 & \end{array}$$

Donc $x^3 - x^2 + 2x - 2 = (x-1)(x^2+2)$

Ainsi

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
x^2+2		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$		$+$	

$x - 1 = 0$
$\iff x = 1$

$x^2 + 2 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac$
$= 0^2 - 4 \times 1 \times 2 = -8 < 0$
Pas de racine !

Donc $P(x) \geq 0 \iff x \geq 1$

Donc $D_{f_5} = [1; +\infty[$

f] $f_6(x) = \dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2 - 4x}$ Il faut que $\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ \text{et } x^2 - 4x \neq 0 \end{cases}$

$x-3 \geq 0 \iff x \geq 3$

$a=1 \quad b=(-4) \quad c=0$

On résout $x^2-4x=0 \rightarrow \Delta=(-4)^2-4\times1\times0$
$=16>0$ 2 racines

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-4)-\sqrt{16}}{2\times1}=\frac{4-4}{2}=0$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-4)+\sqrt{16}}{2\times1}=\frac{4+4}{2}=4$

Ainsi il faut que $\begin{cases} x \geq 3 \\ \text{et } x \neq 0 \text{ et } x \neq 4 \end{cases}$

inutile

Ainsi : $D_{f_6}=[3;4[\cup]4;+\infty[$

Ex n°3

① a] $A=3(x-5)-[(x+1)(2x-1)]$

$=3x-15-[2x^2-x+2x-1]$

$=3x-15-2x^2+x-2x+1$

$=-2x^2+2x-14$

b] $B=\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2$

$=(2x)^2-\cancel{2}\times2x\times\frac{1}{\cancel{2}}+\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$=4x^2-2x+\frac{1}{4}$

② a] $C=(x+3)(2x-3)+x+3$

$=(x+3)(2x-3)+(x+3)\times1$

$=(x+3)[2x-3+1]$

$=(x+3)(2x-2)$

b] $D=(1-x)^2-25$

$=(1-x)^2-5^2$

$=[(1-x)-5]\times[(1-x)+5]$

$=(-4-x)(6-x)$

③ a] $E = \frac{3\sqrt{20}}{4} = \frac{3\times\sqrt{4\times5}}{4} = \frac{3\sqrt{4}\sqrt{5}}{4}$

$= \frac{3\times\cancel{2}\sqrt{5}}{\cancel{4}\ 2\times\cancel{2}} = \boxed{\frac{3\sqrt{5}}{2}}$

b] $F = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$

$= \frac{1\times(x+1)(x+2)}{x(x+1)(x+2)} + \frac{x(x+2)}{x(x+1)(x+2)} + \frac{x(x+1)}{x(x+1)(x+2)}$

$= \frac{x^2+2x+x+2 + x^2+2x + x^2+x}{x(x+1)(x+2)}$

$= \boxed{\frac{3x^2+6x+2}{x(x+1)(x+2)}}$

Ex n°4 a] $x-5 > 3x+2$

$\Leftrightarrow x-3x > 2+5$

$\Leftrightarrow -2x > 7 \quad \big\} \div(-2) \ominus$

$\Leftrightarrow \boxed{x < -\frac{7}{2}}$

b] $-3x^2+x-6 > 0$

$a=(-3) \quad b=1 \quad c=(-6)$

$\Delta = b^2-4ac = 1^2-4\times(-3)\times(-6)$

$= 1-72 = -71 < 0$ pas de racine

x	$-\infty$	$+\infty$
$-3x^2+x-6$	$-$	

Donc $-3x^2+x-6>0$ n'a pas de solution.

c] $2x^2+6x-6 \leq x^2+2x-1$

$\Leftrightarrow 2x^2-x^2+6x-2x-6+1 \leq 0$

$\Leftrightarrow x^2+4x-5 \leq 0$

$a=1 \quad b=4 \quad c=(-5)$

$\Delta = b^2-4ac = 4^2-4\times1\times(-5)$

$= 16+20 = 36 > 0$ 2 racines

$x_1 = \frac{-4-\sqrt{36}}{2} = \frac{-4-6}{2} = \frac{-10}{2} = -5$

$x_2 = \frac{-4+\sqrt{36}}{2} = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = 1$

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
x^2+4x-5		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $x^2+4x-5 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-5;1]$

d] $\dfrac{5-2x}{3x-18} \leq 0$

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		6		$+\infty$
$5-2x$		$+$	0	$-$		$-$	
$3x-18$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{5-2x}{3x-18}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

$5-2x=0$
$-2x=-5$
$x=\frac{5}{2}$

$3x-18=0$
$3x=18$
$x=6$

Donc $\dfrac{5-2x}{3x-18} \leq 0 \iff x \in \left]-\infty;\frac{5}{2}\right] \cup \left]6;+\infty\right[$

e] $(4-2x)(x^2+x+5) \geq 0$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$4-2x$		$+$	0	$-$	
x^2+x+5		$+$		$+$	
Produit		$+$	0	$-$	

$4-2x=0$
$-2x=-4$
$x=\frac{-4}{-2}=2$

$\Delta=b^2-4ac$
$=1-4\times1\times5$
$=-19<0$
Pas de racine !

Ainsi $(4-2x)(x^2+x+5) \geq 0$
$\iff x \in \left]-\infty;-2\right]$

f] $x-1 > -\dfrac{2}{x+2}$

$\iff x-1+\dfrac{2}{x+2} > 0$

$\iff \dfrac{(x-1)(x+2)}{x+2} + \dfrac{2}{x+2} > 0$

$\iff \dfrac{x^2+2x-x-2}{x+2} + \dfrac{2}{x+2} > 0$

$\iff \dfrac{x^2+x}{x+2} > 0$

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
x^2+x		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{x^2+x}{x+2}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

$x^2+x=0$
$\Delta=1>0$
$x_1=-1$ $x_2=0$

$x+2=0$
$x=-2$

Donc $x-1 > -\dfrac{2}{x+2} \iff x \in \left]-2;-1\right[\cup \left]0;+\infty\right[$

Ex n°5

①

x	-5	-2	0	1	3	7
$f(x)$	2 ↗	3 ↘	-3 ↗	-1 ↘	-3 ↗	5

② L'image de 1 vaut -1 et celle de 3 vaut -3

③ Les antécédants de 1 par f sont $x \simeq -1{,}7$ et $x \simeq 6{,}3$

④ $f(x) \geqslant 2 \iff x \in [-5;-2] \cup [6{,}7;7]$

⑤ Le maximum de f vaut 5, atteint en $x=7$
Le minimum de f vaut -3, atteint en $x=0$ et en $x=3$

Ex n°6

① $C(1) = 1^2+3\times1+8 = 1+3+8 = 12$
Pour 1 objet fabriqué, le coût de production est de 12€

② On résout $C(x)=26 \iff x^2+3x+8=26$
$\iff x^2+3x+8-26=0$
$\iff x^2+3x-18=0$ $\quad a=1 \quad b=3 \quad c=-18$

$\Delta = b^2-4ac = 3^2-4\times1\times(-18) = 9+72 = 81>0$

Donc $x_1 = \dfrac{-3-9}{2} = \dfrac{-12}{2} = -6$ et $x_2 = \dfrac{-3+9}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

impossible de fabriquer -6 objets !

Donc, pour un coût de 26€, il faut fabriquer 3 objets.

③ On a $R(x) = 9x$

④ $B(x) = R(x) - C(x) = 9x - (x^2+3x+8)$
$= 9x - x^2 - 3x - 8$
$= -x^2+6x-8$

⑤ On calcule $\Delta = 6^2 - 4\times(-1)\times(-8) = 36 - 32 = 4 > 0$

$$x_1 = \frac{-6-2}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4 \qquad x_2 = \frac{-6+2}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Ainsi

x	0		2		4		6
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Donc $B(x) > 0 \iff x \in \,]2;4[$

Ainsi l'entreprise réalise un bénéfice seulement quand elle produit 3 objets.

⑥ B est un polynôme du 2^{nd} degré et $a<0$

x	0		3		6
$B(x)$		↗	26	↘	

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2\times(-1)} = -\frac{6}{-2} = 3$$

⑦ D'après les questions précédentes, le bénéfice est maximal si l'entreprise produit 3 objets. Ce bénéfice sera alors de 26€.

Ex n°7

Partie A

① $f(x) = 0 \iff x \in \{-1;2;3\}$

② $f(x) \leq 4 \iff x \in [-1,2\,;-0,5] \cup [1\,;3,5]$

③ $f(1) = 4$ et les antécédents de 2 sont $x=-0,8$ / $x=1,5$ / $x=3,4$

④

x	-2		0		$2{,}5$		5
$f(x)$		$\nearrow$	6	$\searrow$	$-0{,}8$	$\nearrow$	

⑤ La courbe n'est pas une parabole en effet.

PARTIE B

① $a_3 = 1 \quad a_2 = -4 \quad a_1 = 1 \quad a_0 = 6$

② $f(2) = 2^3 - 4\times 2^2 + 2 + 6 = 8 - 16 + 8 = 16 - 16 = 0$

③ $x = 2$ est une racine de f donc :

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 4x^2 + x + 6 & x-2 \\ \cline{2-2}
-(x^3 - 2x^2) & x^2 - 2x - 3 \\ \cline{1-1}
-2x^2 + x + 6 & \\
-(-2x^2 + 4x) & \\ \cline{1-1}
-3x + 6 & \\
-(-3x + 6) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Donc $f(x) = (x-2)(x^2 - 2x - 3)$

④ Ainsi $f(x) = 0 \iff (x-2)(x^2-2x-3) = 0$

$$\iff \begin{cases} x - 2 = 0 \longrightarrow x = 2 \\ \text{ou} \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \longrightarrow \Delta = (-2)^2 - 4\times 1\times(-3) \end{cases}$$

$a = 1$

$b = (-2)$

$c = (-3)$

$= 4 + 12$

$= 16 > 0$ 2 racines

$x_1 = \dfrac{-(-2) - \sqrt{16}}{2\times 1} = \dfrac{2-4}{2} = -\dfrac{2}{2} = -1$

$x_2 = \dfrac{-(-2) + \sqrt{16}}{2\times 1} = \dfrac{2+4}{2} = 3$

$$\text{Donc } f(x) = 0 \iff x \in \{-1 ; 2 ; 3\}$$

5

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
x^2-2x-3		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$x-2=0 \iff x=2$

$x^2-2x-3=0 \iff x=-1$ ou $x=3$