ECT1 - DEVOIR SURVEILLÉ N°3

Durée : 3 heures.
Documents et calculatrices interdits.
Les résultats doivent obligatoirement être encadrés.
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ vérifiant les quatre conditions suivantes :

- $f(0) = 2$ et $f(5) = 1$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.
- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. Que peut-on dire sur la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $-\infty$? de 3 ? de $+\infty$?
2. Tracer ce qui peut être la courbe représentative de f.

Exercice 2

Calculer les limites suivantes. *On détaillera le raisonnement.*

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}(1 - x^3)$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^3 - 5x - 7$
3. $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3x - 4}{6 - 3x}$
4. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(3 - \dfrac{1}{x}\right)^7$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3\sqrt{x} - 5}{x}$
6. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x + 1}{x^2 - x - 2}$

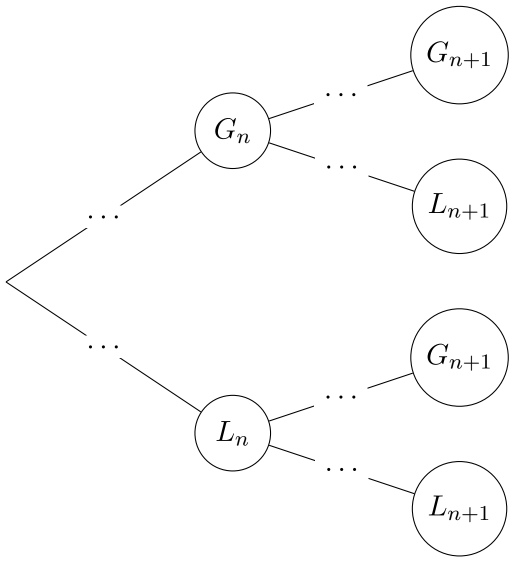
Exercice 3

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8 ;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.

On note, pour tout entier naturel n non nul G_n l'évènement « le joueur gagne la n-ieme partie» et L_n l'évènement « le joueur perd la n-ieme partie».
On note u_n la probabilité de l'évènement G_n.
On a donc $u_1 = 0,1$.

1. Exprimer $P(L_n)$ en fonction de u_n.
2. Recopier l'arbre suivant et compléter les probabilités (u_n devra apparaître sur l'une des branches).



3. En utilisant la formule des probabilités totales, justifier que : $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{3}{5}$.
4. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
5. Justifier que la solution de l'équation : $x = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{3}{5}$ est $x = \dfrac{3}{4}$.
6. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
7. Recopier et compléter le programme PYTHON suivant afin qu'il affiche le terme u_{10} :

```
import numpy as np
u = np.zeros(.........)
u[0]= .........
for k ......... :
        u[k+1] = .........
print(.........)
```

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + n$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
3. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n + n + 1$.
   (a) Calculer v_0.
   (b) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 2.
   (c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 5

Un restaurant fait appel à deux livreurs pour livrer ses repas. Le livreur A est chargé du tiers des repas à livrer et le livreur B est chargé du reste. Le livreur A livre les repas en retard avec probabilité $\frac{1}{5}$, alors que le livreur B livre les repas en retard avec probabilité $\frac{1}{10}$.
On considère la livraison d'un repas. On note :

- A l'événement « le repas est livré par le livreur A ».
- B l'événement « le repas est livré par le livreur B ».
- R l'événement « le repas est livré en retard ».

1. Dresser l'arbre de probabilités représentant la situation étudiée.
2. Montrer que le repas est livré en retard avec probabilité $\frac{2}{15}$. *On justifiera rigoureusement la réponse.*
3. Le repas arrive en retard. Quelle est la probabilité qu'il ait été livré par le livreur A ?
4. On considère maintenant trois livraisons successives numérotés de 1 à 3. On suppose que les retards éventuels de livraison sont indépendants d'une livraison à l'autre.
   On note pour $i \in \{1, 2, 3\}$, R_i l'événement « le repas numéro i est livré en retard ».
   (a) Exprimer l'événement $T =$« les trois repas sont livrés en retard » à l'aide des événements R_i.
   (b) En déduire la probabilité de T. *On justifiera rigoureusement la réponse et on ne cherchera pas à simplifier le résultat.*
   (c) Quelle est la probabilité qu'au moins un des repas soit livré à temps ?

Exercice 6 - Bonus

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1.$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$n \leqslant u_n \leqslant n + 3.$$