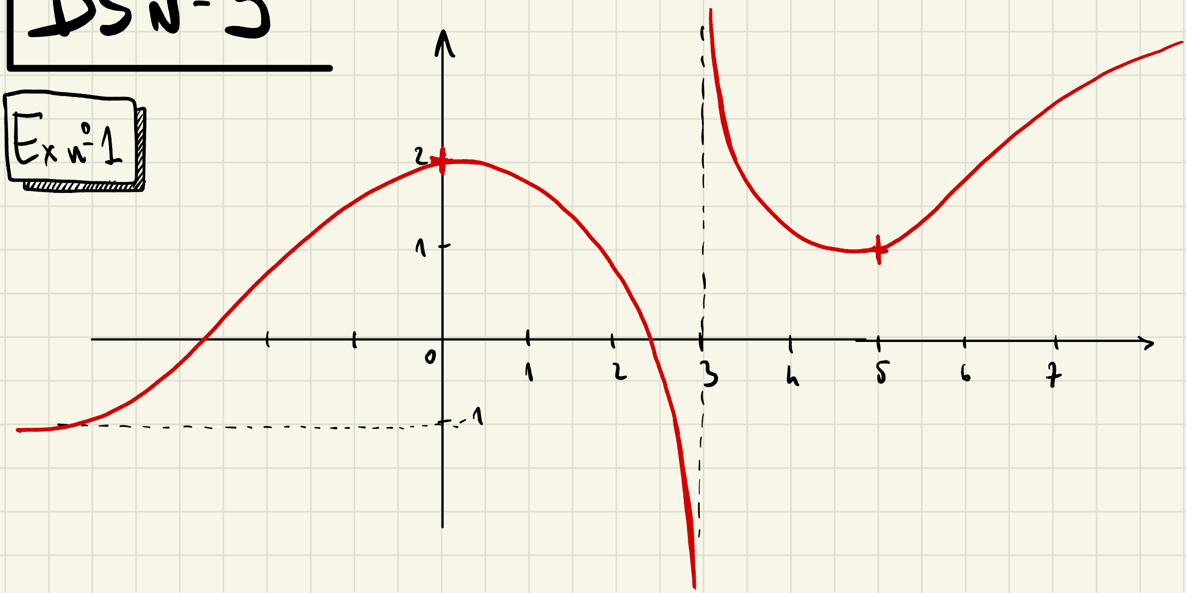
DS n°3

Ex n°1



Ex n°2

① $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1-x^3 = \lim\limits_{x\to+\infty} -x^3 = -\infty$

Par limite de produit

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,(1-x^3) = -\infty}$$

② $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^3-5x-7 = \lim\limits_{x\to-\infty} 3x^3 = \boxed{-\infty}$

③ $\lim\limits_{x\to2^+} 3x-4 = 2 \geqslant 0$

$\lim\limits_{x\to2^+} 6-3x = 0^-$

Par quotient de limites

$$\boxed{\lim_{x\to2^+} \frac{3x-4}{6-3x} = -\infty}$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$6-3x$		$+$	0 (0^-)	$-$	

④

$\lim\limits_{x\to0^+} 3 = 3$

$\lim\limits_{x\to0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$

Par limite de sommes

$\lim\limits_{x\to0^+} 3-\frac{1}{x} = -\infty$

$\lim\limits_{X\to-\infty} X^7 = -\infty$

Par composée de limites

$$\boxed{\lim_{x\to0^+} \left(3-\frac{1}{x}\right)^7 = -\infty}$$

⑤ $\dfrac{3\sqrt{n}-5}{n} = \dfrac{3\sqrt{n}}{n} - \dfrac{5}{n} = \dfrac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n}\times\sqrt{n}} - \dfrac{5}{n} = \dfrac{3}{\sqrt{n}} - \dfrac{5}{n}$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{5}{n} = 0$ Par somme de limites $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{\sqrt{n}} - \dfrac{5}{n} = 0}$

⑥ $\lim\limits_{n\to-1^+} n+2 = 1 \geq 0$ et $\lim\limits_{n\to-1^+} n^2-n-2 = 0^-$ Par quotient de limites : $\boxed{\lim\limits_{n\to-1^+} \dfrac{n+2}{n^2-n-2} = -\infty}$

n	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
n^2-n-2		$+$	0 0^-	$-$	0	$+$	

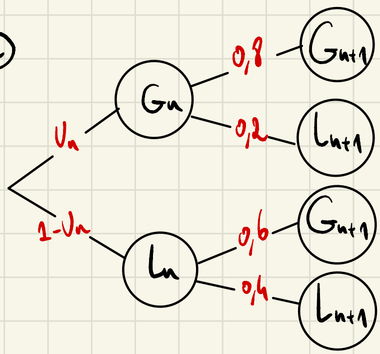
$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\times1\times(-2) = 1+8 = 9 > 0$ Donc 2 racines

$n_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1)-\sqrt{9}}{2\times1} = \dfrac{1-3}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1$ et $n_2 = \dfrac{1+3}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

Ex n°3

① $P(L_n) = P(\overline{G_n}) = 1 - p(G_n) = \boxed{1-U_n}$

②



③ (G_n, L_n) forment un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(G_{n+1}) = P(G_n \cap G_{n+1}) + P(L_n \cap G_{n+1})$$
$$= P(G_n)\times P_{G_n}(G_{n+1}) + P(L_n)\times P_{L_n}(G_{n+1})$$
$$= U_n \times 0,8 + (1-U_n)\times 0,6$$

Ainsi $U_{n+1} = 0,8\,U_n + 0,6(1-U_n) = 0,8\,U_n + 0,6 - 0,6\,U_n$

$U_{n+1} = 0,2\,U_n + 0,6 = \boxed{\dfrac{1}{5}U_n + \dfrac{3}{5}}$

④ (U_n) est arithmético-géométrique.

(5) On resout $x = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5} \Leftrightarrow x - \frac{1}{5}x = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{5}{5}x - \frac{1}{5}x = \frac{3}{5}$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{5}x = \frac{3}{5} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{4} = \frac{3}{4}$$

(6) On pose $V_n = U_n - x = U_n - \frac{3}{4}$

Alors pour $n \geqslant 1$ $V_{n+1} = U_{n+1} - \frac{3}{4} = \frac{1}{5}U_n + \frac{3}{5} - \frac{3}{4}$

$$= \frac{1}{5}\left(V_n + \frac{3}{4}\right) + \frac{3^{\times 4}}{5_{\times 4}} - \frac{3^{\times 5}}{4_{\times 5}} = \frac{1}{5}V_n + \frac{3}{20} + \frac{12}{20} - \frac{15}{20}$$

Alors $\boxed{V_{n+1} = \frac{1}{5}V_n}$ La suite (V_n) est donc géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$

et de 1^er terme $V_1 = U_1 - \frac{3}{4} = 0{,}1 - \frac{3}{4} = \frac{1^{\times 2}}{10_{\times 2}} - \frac{3^{\times 5}}{4_{\times 5}} = -\frac{13}{20} = -\frac{3}{5}$

Donc $\forall n \geqslant 1$ $V_n = V_1 \times q^{n-1} = -\frac{3}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

Alors $\forall n \geqslant 1$ $\boxed{U_n = -\frac{3}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{3}{4}}$

(7)
```
u = np.zeros(10)
u[0] = 0.1
For k in range(9):
    u[k+1] = 0.2 * u[k] + 0.6
print(u[9])
```

Ex n° 4

(1) $n=0 \longrightarrow U_1 = 2U_0 + 0 = 2 \times 1 = 2$

$n=1 \longrightarrow U_2 = 2U_1 + 1 = 2 \times 2 + 1 = 5$

(2) $U_0 = 1 \xrightarrow{+1} U_1 = 2 \xrightarrow{+3} U_2 = 5$ La suite n'est pas arithmétique

$U_0 = 1 \xrightarrow{\times 2} U_1 = 2 \xrightarrow{\times \frac{5}{2}} U_2 = 5$ La suite n'est pas géométrique

(3) On pose $V_n = U_n + n + 1$

a] $V_0 = U_0 + 0 + 1 = 1 + 1 = \boxed{2}$

b] $V_{n+1} = U_{n+1} + (n+1) + 1$

$= 2U_n + n + n + 1 + 1$

$= 2U_n + 2n + 2$

$= 2(V_n - n - 1) + 2n + 2$

$= 2V_n - 2n - 2 + 2n + 2$

$= 2V_n$

La suite (V_n) est donc géométrique de raison $q = 2$ et de 1^er^ terme $V_0 = 2$

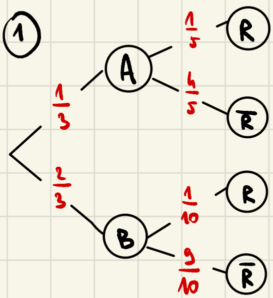
c] Ainsi $\forall n \geq 0$ $V_n = V_0 \times q^n = 2 \times 2^n = \boxed{2^{n+1}}$

et donc $\forall n \geq 0$ $U_n = V_n - n - 1$

$$\boxed{U_n = 2^{n+1} - n - 1}$$

Ex n°5

1



2 (A, B) forment un système complet d'événement.

D'après la formule des probabilités totales :

$P(R) = P(A \cap R) + P(B \cap R)$

$= P(A)P_A(R) + P(B) \times P_B(R)$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{10} = \frac{1^{\times 2}}{15_{\times 2}} + \frac{2}{30} = \frac{2}{30} + \frac{2}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

Donc $\boxed{P(R) = \frac{2}{15}}$

3 On cherche $P_R(A) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{2}{15}} = \frac{1}{\cancel{15}} \times \frac{\cancel{15}}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

4 a] $T = R_1 \cap R_2 \cap R_3$

b] $P(T) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3)$

$= P(R_1) \times P(R_2) \times P(R_3)$

$= \frac{2}{15} \times \frac{2}{15} \times \frac{2}{15} = \boxed{\frac{8}{15^3}}$

les événements R_i sont indépendants entre eux.

c] p("Au moins 1 repas livré à temps") $= 1 - p$("Aucun des repas n'est livré à temps")

$= 1 - p$("les 3 repas sont livrés en retard")

$= 1 - p(T)$

$= \boxed{1 - \dfrac{8}{15^3}}$

Ex n°6 (Bonus) On pose $P_n : n \leqslant U_n \leqslant n+3$

- <u>Initialisation</u> : Vérifions que $P_0 : 0 \leqslant U_0 \leqslant 0+3$ est vraie.

  Or $U_0 = 3$ donc $0 \leqslant 3 \leqslant 0+3$ et donc P_0 est vraie.

- <u>Hérédité</u> : Soit $k \geqslant 0$. On suppose P_k vraie
  ↳ c'est à dire $P_k : [k \leqslant U_k \leqslant k+3]$ HR

Montrons que P_{k+1} est vraie → c'est à dire mq $k+1 \leqslant U_{k+1} \leqslant k+1+3$

On a HR

$$k \leqslant U_k \leqslant k+3 \quad \Big\downarrow \times \tfrac{1}{2} > 0$$

$$\frac{1}{2}k \leqslant \frac{1}{2}U_k \leqslant \frac{1}{2}(k+3) \quad \Big\downarrow + \tfrac{1}{2}k$$

$$\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}k \leqslant \frac{1}{2}U_k + \frac{1}{2}k \leqslant \frac{1}{2}(k+3) + \frac{1}{2}k \quad \Big\downarrow +1$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}k + 1}_{k+1} \leqslant \underbrace{\frac{1}{2}U_k + \frac{1}{2}k + 1}_{U_{k+1}} \leqslant \frac{1}{2}(k+3) + \frac{1}{2}k + 1$$

$$k + 1 \leqslant U_{k+1} \leqslant \underbrace{\frac{1}{2}k + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}k + 1}_{k+\frac{5}{2}}$$

$$k+1 \leqslant U_{k+1} \leqslant k + \frac{5}{2} \leqslant k+4$$

Donc P_{k+1} est vraie.

- <u>Conclusion</u> : P_n est vraie en 0 et est héréditaire.

  Par principe de récurrence : $\forall n \geqslant 0 \quad n \leqslant U_n \leqslant n+3$.