Vocabulaire des Variables Aléatoires Réelles

Nous proposons ici un lexique spécifique aux variables aléatoires réelles. Les définitions ne sont pas triées en ordre alphabétique mais plutôt dans un ordre qui suppose connu les définitions précédantes pour chaque nouvelle lecture de définition.
Les définitions portant le sigle ∇ ne revêtent pas de caractère obligatoire cette année, en particulier celles qui concerneraient les cas non finis (programme de seconde année).

Vocabulaire (et notations) des variables aléatoires

Dans cette section, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$ où Ω est fini, cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, sauf mention explicite du contraire.

- ☐ **Variable Aléatoire Réelle (VAR) :** Application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

- ☐ **VAR finie :** On dira que X est finie lorsque $X(\Omega)$ est de cardinal fini.

- ∇ **VAR discrète :** On dira que X est discrète lorsque $X(\Omega)$ est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$ (i.e. dénombrable).

- ☐ Notations : Les événements associés aux manipulations de VAR disposent de leurs notations propres :
  - Pour I, intervalle de $\mathbb{R}$, on préfère noter $[X \in I]$ l'événement se décrivant comme $\{\omega \in \Omega\ ;\ X(\omega) \in I\}$
  - On peut écrire $[X = a]$ au lieu de $[X \in \{a\}] = \{\omega \in \Omega\ ;\ X(\omega) = a\}$
  - On peut écrire $[X \leq a]$ au lieu de $[X \in]-\infty\ ;\ a\ ]\ ] = \{\omega \in \Omega\ ;\ X(\omega) \leq a\}$
  - On peut écrire $[X < a]$ au lieu de $[X \in]-\infty\ ;\ a\ [\ ] = \{\omega \in \Omega\ ;\ X(\omega) < a\}$
  - On peut écrire $[X \geq a]$ au lieu de $[X \in [a\ ;\ +\infty[\ ] = \{\omega \in \Omega\ ;\ X(\omega) \geq a\}$
  - On peut exploiter les notations $[a < X < b]$, $[a \leq X \leq b]$, $[a < X \leq b]$ ou encore $[a \leq X < b]$ de façon analogue.

- ☐ **Loi de VAR :** La loi d'une VAR notée X est la donnée des valeurs $(\mathbb{P}[X \in I])_{I:\text{intervalle}}$.
  A retenir : En pratique, la donnée $(\mathbb{P}[X = x])_{x \in X(\Omega)}$ suffit et produit un système complet d'événements.

- ∇ **support d'une VAR :** Les valeurs réelles x que X peut éventuellement prendre avec probabilité non nulle.

Indicateurs des VAR discrètes :

Dans cette section, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$ et on considère que X est une VAR finie définie sur cet espace (avec Ω lui-même fini).
Nous donnons alors, lorsque possible, la définition plus générale et la formule qui sera souvent utilisée en exercices lorsque l'on a décrit :

$$X(\Omega) = \{x_1\ ;\ x_2\ ;\ \dots\ ;\ x_n\}$$

- ☐ **Espérance :** Valeur définie par la formule : $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}[X = x] = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}[X = x_k]$

- ☐ **Variance :** Valeur définie par la formule : $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x_k - \mathbb{E}[X])^2\, \mathbb{P}[X = x_k]$

- ☐ **Ecart-type :** Sous-couvert d'existence de $\mathbb{V}[X]$, valeur $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}[X]}$.

- ☐ **Fonction de Répartition d'une VAR :** La fonction, notée F_X définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R} \quad F_X(t) = \mathbb{P}[X \leq t]$
- ☐ **VAR centrée :** On dit de X qu'elle est centrée lorsque $\mathbb{E}[X] = 0$.

- ☐ **VAR centrée-réduite :** On dit de X qu'elle est centrée lorsque $\mathbb{E}[X] = 0$ et que $\mathbb{V}[X] = 1$.

  Remarque : L'emploi de *VAR réduite* pour le seul cas $\mathbb{V}[X] = 1$ est un abus, non reconnu universellement.

- ☐ **VAR centrée-réduite associée :** On définit X^* associée à X comme : $X^* = \dfrac{1}{\sigma(X)} \cdot (X - \mathbb{E}[X])$ dès lors que $\sigma(X) \neq 0$ ce qui revient à demander X non presque-sûrement certaine