

## Méthode et Formules pour Ari-Géo

Nous proposons dans ce document une synthèse de la méthode permettant d'obtenir le  $n^{\text{ième}}$  terme d'une suite arithmético-géométrique. Celle-ci aboutit à la production d'une formule *pouvant être donnée et connue* mais sans que cela ne relève d'un caractère obligatoire.

### Définitions, contexte

On considère donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmético-géométrique, les notations  $q$  et  $r$  désignant des réels donnés tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = qu_n + r$$

On rappelle que, si  $q = 1$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmétique et ce cas ne sera pas considéré pour l'exécution de la méthode proposée.

### Méthode de traitement :

#### 1° Equation (au point fixe)

On pose et résout l'équation  $x = qx + r$  (rappelant que  $q \neq 1$ ) :  $x = qx + r \iff (1 - q)x = r \iff x = \frac{r}{1 - q}$ .

On notera à présent  $\alpha = \frac{r}{1 - q}$  la solution de cette équation.

#### 2° Suite Auxiliaire

On définit une suite auxiliaire  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  au moyen de  $x_n = u_n - \alpha$ . On démontre que cette suite est géométrique :  
Calculons, pour  $n \in \mathbb{N}$  donné :

$$\begin{aligned} x_{n+1} = u_{n+1} - \alpha &= (qu_n + r) - \frac{r}{1 - q} \\ &= qu_n + \frac{r(1 - q)}{1 - q} - \frac{r}{1 - q} = qu_n + \frac{-qr}{1 - q} \\ &= q \left( u_n - \frac{r}{1 - q} \right) = q(u_n - \alpha) = qx_n \end{aligned}$$

La suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc bien géométrique de raison  $q \neq 1$  et l'on a  $x_0 = u_0 - \alpha$

#### 3° Forme Explicite de la suite auxiliaire

Par le théorème caractéristique des suites géométriques on peut écrire :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = x_0 \times q^n = (u_0 - \alpha)q^n$

#### 4° Forme Explicite de la suite originale

La définition de la suite auxiliaire peut se réécrire sous la forme  $x_n = u_n - \alpha$ , ce qui fournit :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (u_0 - \alpha)q^n + \alpha$  permettant de conclure dans une situation numérique donnée.

### formule générale

L'écriture générale de cette méthode permet d'aboutir, pour une suite arithmético-géométrique donnée  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et vérifiant  $u_{n+1} = qu_n + r$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  avec  $q \neq 1$  :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \left( u_0 - \frac{r}{1 - q} \right) q^n + \frac{r}{1 - q}$$