Symbole $\sum$: approfondissements

Nous proposons dans ce document une synthèse des manipulations usuelles du symbole $\sum$.

Dans toute la suite, les lettres n, a et b désignent des entiers naturels avec $a \leq b$ et les écritures u_k, v_k, u_i etc... renvoient à des termes de suites numériques (réelles).

• Aspect récurrent

Lorsque $n \geq a$ on a :

$$\boxed{S_n = \sum_{k=a}^{n} u_k \quad \Longrightarrow \quad S_{n+1} = u_{n+1} + S_n}$$

• Linéarité

Se décline en deux aspects :

$$\boxed{\sum_{k=a}^{b}(u_k + v_k) = \sum_{k=a}^{b} u_k + \sum_{k=a}^{b} v_k} \qquad \boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=a}^{b} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=a}^{b} u_k}$$

- **Changement / glissement d'indices**

$$\boxed{\sum_{k=a}^{b} u_k = \sum_{k=0}^{b-a} u_{a+k}}$$

- **Invariance du choix d'indice (libre)**

$$\boxed{\sum_{k=a}^{b} u_k = \sum_{i=a}^{b} u_i = \sum_{j=a}^{b} u_j = \dots}$$

⚠Attention ! Vous ne pouvez pas employer une lettre déjà prise dans l'expression, ainsi $v_n + \sum_{n=a}^{b} u_n$ ou encore $\sum_{n=0}^{n} u_n$ sont des exemples d'écritures à proscrire.

- **Regroupement/séparation de termes**
Lorsque $n > b \geq a$, on peut écrire :

$$\boxed{\sum_{k=a}^{b} u_k + \sum_{k=b+1}^{n} u_k = \sum_{k=a}^{n} u_k}$$

On peut aussi parler de *relation de Chasles*

- **Renversement / Symétrie**

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}}$$

Peut aussi être généralisé : $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} u_k = \sum_{k=a}^{b} u_{(b+a)-k}$