Concours Blanc C_1

Durée : quatre heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

Problème I : Tout dépend du point de départ

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant le relation de récurrence définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$$

Les parties A, B et C sont indépendantes les unes des autres.

Partie A : départ tranquille

Dans cette partie, $u_0 = 2$

1. Calculer les valeurs de u_1, u_2 et u_3. Que constatez-vous ?
2. Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$
3. En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
   (a) Justifier que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 2.
   (b) Expliciter S_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Partie B : de trois à deux

Dans cette partie, $u_0 = 3$

1. Calculer les valeurs de u_1, u_2 et u_3.
2. Etablir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni arithmétique, ni géométrique.
3. Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.
4. Résoudre l'équation $x = \frac{1}{2}x + 1$
5. Démontrer que $x_n = u_n - 2$ définit une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
6. Déterminer une expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
7. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
   (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
   $$S_n = 2(n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$$
   (b) En déduire une expression explicite de S_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Partie C : revenir du fond

Dans cette partie, $u_0 = -2$

1. Calculer les valeurs de u_1, u_2 et u_3.
2. Etablir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni arithmétique, ni géométrique.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2$
4. Etablir l'équivalence, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_n \leq 2$$

5. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
6. Justifier qu'il existe un entier naturel p tel que $u_p > 0$ et en déduire que, si $n \geq p$ alors $u_n > 0$.
7. Par une méthode de votre choix, expliciter le terme général u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$
   (a) Exprimer $S_{n+1} - S_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   (b) La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ? Justifier.

Problème II : Droites et paraboles par choeur

Dans ce problème, on considère un repère orthonormé d'unité graphique 2cm. Toutes les figures attendues devront être réalisées dans ce même repère que le candidat pourra insérer dans sa copie.
Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A : droites

Soient $D_1 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y - 8 \geq 0\}$ et $D_2 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5x - 3y - 7 \leq 0\}$. On pose $E = D_1 \cap D_2$.

1. On pose $f(x) = 4 - \frac{3}{2}x$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$
   (b) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ puis dresser le tableau des signes de f sur $\mathbb{R}$.
2. On pose $g(x) = \frac{5x-7}{3}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$
   (b) Résoudre l'équation $g(x) = 0$ puis dresser le tableau des signes de g sur $\mathbb{R}$.
3. Tracer dans le repère proposé, les représentations graphiques de f et g, notées respectivement d_1 et d_2.
4. Résoudre le système (S) suivant, d'inconnues $(x;y) \in \mathbb{R}^2$:

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rrcl} 5x & -3y & = & 7 \\ 3x & +2y & = & 8 \end{array} \right.$$

5. Justifier que le couple solution de (S) forme les coordonnées du point d'intersection de d_1 avec d_2.
6. Hachurer la partie du graphique correspondant à la région E.

Partie B : Paraboles

On considère la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = 4 + 2x - x^2$. On notera $\mathcal{P}$ sa parabole représentative dans le repère proposé.

1. Calculer $p(2)$.
2. Résoudre l'équation $p(x) = 0$.
3. Dresser le tableau des signes de $p(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
4. Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole $\mathcal{P}$.
5. En justifiant, dresser le tableau des variations de p sur $\mathbb{R}$.
6. Tracer l'allure de la parabole $\mathcal{P}$.
7. On considère une nouvelle parabole $\mathcal{Q}$, courbe représentative d'une fonction q définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad p(x-2) = q(x)$$

   (a) Déterminer $q(4)$
   (b) Justifier que la parabole $\mathcal{Q}$ a pour sommet le point M de coordonnées $(3; 5)$.
   (c) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec $\mathcal{Q}$.
8. Tracer l'allure de $\mathcal{Q}$ dans votre repère.
9. On note P la partie du plan située *en-dessous* de la parabole $\mathcal{P}$ et Q la partie du plan située *en-dessous* de la parabole $\mathcal{Q}$.
   Dans votre graphique, mettre en évidence la région $F = P \cup Q$ en précisant bien votre légende.

Partie C : Synthèse

E et F désignent, dans cette partie, les régions définies en parties respectives A et B.

1. Résoudre l'équation $4 + 2x - x^2 = 4 - \frac{3}{2}x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation $6x - x^2 - 4 = \dfrac{5x-7}{3}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. Colorer la région $E \cap F$ sur votre figure. Cette région sera notée $\heartsuit$
4. Le contour de $\heartsuit$ est composé de divers éléments ayant été étudiés au cours de ce problème.
   Quels en sont les points qui correspondent à des solutions d'équations étudiées ?

Toute ressemblance avec une figure connue ne serait que fort fuite

Problème III : De la fournaise

On considère une fonction nommée `fire` définie par son expression de calcul :

$$\texttt{fire} : x \mapsto \texttt{fire}(x) = \frac{\sqrt{2 - x - x^2}}{x + \frac{1}{2}}$$

1. Résoudre l'inéquation $2 - x - x^2 \geq 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$
2. En déduire le domaine de définition réel $\mathcal{D}$ de la fonction `fire`
3. On pose `four` la fonction définie par $\texttt{four}(x) = \sqrt{2 - x - x^2}$.
   (a) Déterminer les valeurs exactes de $\texttt{four}(0)$, $\texttt{four}(1)$, $\texttt{four}\left(\frac{1}{3}\right)$ et $\texttt{four}(-\sqrt{2})$
   (b) RECOPIER puis compléter le programme suivant écrit en Python pour qu'il vérifie que l'entrée `x` est bien dans le domaine de définition de `four` puis affiche la valeur de $\texttt{four}(x)$

```
def four(x):
        y=.................
        return ............
x= float(input("donner une valeur réelle"))
if ....................:
        y=four(x)
        print(y)
else :
        print(..................)
```

4. Le script Python suivant permet de définir une fonction :

```
def naise(x):
        y=x+1/2
        b=y**(-1)
        return b
```

   Définir, en notations mathématiques, cette fonction.
5. Ecrire un script Python définissant la fonction `fire`.
   Vous pourrez utiliser les fonctions `four` et `naise` définies supra
6. Quelle(s) commande(s) taper à la console pour compléter le tableau suivant ? On supposera que la commande `fire` a été programmée correctement.

$x =$	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\sqrt{2}$
`fire`				

Problème IV : Tours de passe-passe

Dans ce problème, si n désigne un entier naturel, on écrira $[\![0; n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à n. Ainsi, par exemple, on aura $[\![0; 2]\!] = \{0; 1; 2\}$.
L'objectif du problème est de constituer un jeu de cartes à partir de *couleurs* et de *numéros* et d'étudier l'évolution des possibilités selon le nombre de numéros, voire de couleurs, introduits.

On désignera par $\mathcal{C}$ l'ensemble des couleurs considérées à tout moment. On adoptera pour convention d'écriture :
- La lettre W désigne le blanc.
- La lettre B désigne le noir.
- La lettre U désigne le bleu.
- La lettre G désigne le vert.
- La lettre R désigne le rouge.

On construit alors un jeu en éditant une carte (et une seule) pour chaque élément de l'ensemble $\mathcal{C} \times [\![0; n]\!]$. Ce dernier ensemble est alors noté Ω_n et sera assimilé à notre jeu de cartes.

Partie A : Numérobis

On considère dans cette partie que $n = 2$ et que $\mathcal{C} = \{W; B; U; G; R\}$

1. Représentez les cartes éditées à l'aide d'un tableau.
2. Que vaut le cardinal de Ω_n dans ce cas de figure ?
3. On sélectionne une carte. On désigne par φ la condition :

$$(\varphi) : \text{“ la carte sélectionnée est bleue ou de numéro non nul"}$$

   Combien de cartes de ce jeu ne valident PAS la condition φ ?
4. Une *poignée de cartes* est constituée à partir d'un nombre arbitraire de cartes prises *simultanément* dans le jeu édité.
   En justifiant, indiquer le nombre de poignées que l'on peut ainsi constituer.

Partie B : En pentachromatique

Dans cette partie, l'ensemble des couleurs $\mathcal{C}$ considéré est $\mathcal{C} = \{W; B; U; G; R\}$. On notera t_n le nombre total de cartes éditées pour $n \in \mathbb{N}$ donné.

1. Démontrer que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une suite arithmétique de raison 5.
2. On sélectionne une carte. On désigne par ψ la condition :

   (ψ) : " la carte sélectionnée porte un numéro à un seul chiffre et sa couleur n'est ni blanc ni noir"

   On suppose que $n \geq 9$
   (a) Combien de cartes valident la condition ψ ?
   (b) Décrire par une phrase en langue naturelle la négation $\overline{\psi}$ de la condition ψ.
   (c) Déterminer en fonction de $n \geq 9$ le nombre de cartes qui valident $\overline{\psi}$
3. Pour quelles valeurs de $n \geq 9$ entier naturel constitue-t-on un jeu contenant autant de cartes validant la condition ψ que de cartes ne la validant pas ?

Partie C : On dit une couleur, pas 1 color...

On considère à présent qu'une carte peut être *incolore*. L'ensemble des couleurs reste $\mathcal{C} = \{W; B; U; G; R\}$ et celui des numéros est $[\![0; n]\!]$

1. Déterminer, en fonction de n, le nombre *supplémentaire* de cartes éditées en acceptant des cartes incolores.
2. En donnant la possibilité à une carte d'être *multicolore* (l'ordre ou la multiplicité des couleurs n'étant pas considérée), combien de cartes, au total, portent le numéro 0 ? le numéro n ?
3. En déduire le nombre total de cartes *multicolores* (avec au moins deux couleurs donc)
4. On fixe dans cette question l'entier n et on désigne par k le nombre de couleurs.
   Justifier que la suite définie par $c_k = (n+1)2^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ est géométrique en précisant sa raison et son premier terme c_0.
5. Exprimer le nombre total de cartes que l'on devra éditer si l'on disposer de 12 couleurs et 10 numéros, en laissant la possibilité des cartes incolores ou multicolores.