Concours Blanc C_2

Durée : quatre heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

Problème I : le coup de la panne

Dans ce problème, on étudie les pannes de service d'une certaine ligne de métro parisien que l'on notera L.
On émet l'hypothèse que, chaque jour, un voyageur régulier peut constater une panne avec une probabilité qui dépend de son constat de la veille :

- Si la ligne L est en panne de service un jour $n \in \mathbb{N}$ donné, alors le voyageur aura une probabilité de $\frac{1}{4}$ d'observer une panne de service le lendemain.
- Si la ligne L n'est pas en panne de service un jour $n \in \mathbb{N}$ donné, alors le voyageur aura une probabilité de $\frac{7}{9}$ de ne pas observer une panne de service le lendemain.

On débute une étude au jour "zéro" où le voyageur que vous êtes constate une panne de service. On notera alors D_n l'événement "*la ligne L est en panne de service au* n^{ieme} *jour de l'étude*" et on notera $p_n = \mathbb{P}[D_n]$ pour $n \in \mathbb{N}$

1. Donnez la valeur de p_0
2. A l'aide de l'énoncé, justifier que l'on a $\mathbb{P}_{D_n}[D_{n+1}] = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}_{\overline{D_n}}[D_{n+1}] = \frac{2}{9}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\mathbb{P}[D_n \cap D_{n+1}] = \frac{1}{4}p_n$
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
$$p_{n+1} = \frac{1}{36}p_n + \frac{2}{9}$$
5. *Etude de la suite* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   (a) Résoudre l'équation $x = \frac{1}{36}x + \frac{2}{9}$
   (b) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = p_n - \frac{8}{35}$ est géométrique. On en précisera la raison.
   (c) Exprimer p_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$
6. Proposer un script Python permettant d'estimer la probabilité que la ligne L subisse une panne de service au trentième jour de l'étude (on ne demande pas la valeur de cette probabilité).
7. En détaillant très soigneusement votre démarche, déterminer la probabilité que la ligne L subisse une panne de service chaque jour de la première semaine d'étude (hormis le jour "zéro")
8. En détaillant très soigneusement votre démarche, déterminer la probabilité que la ligne L ne subisse aucune panne de service durant la première semaine d'étude (hormis le jour "zéro").

Problème II : Etude de fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}\backslash\{2; -1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 8x^2 + 21x - 18}{x^2 - x - 2}$$

On notera $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans une repère orthogonal.

1. Vérifier que f est une application de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$.
2. RECOPIER et compléter le script Python suivant pour qu'il permette le calcul d'images $f(x)$ lorsque x est fourni en entrée :

```
from math import*
def f(x):
...........
...........
...........
```

(le nombre de lignes est laissé à l'appréciation du candidat)

3. *Etude du numérateur :*
   On pose $p(x) = x^3 - 8x^2 + 21x - 18$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Calculer $p(3)$. Qu'observe-t-on ?
   (b) Déterminer les racines du polynôme $X^2 - 5X + 6$.
   (c) Proposer une forme factorisée de $p(x)$.
   (d) On pose $q(x) = 3x^2 - 16x + 21$. Dresser le tableau des signes de q sur $\mathbb{R}$.
   (e) Proposer une représentation graphique de p dans un repère orthogonal.

4. *Etude asymptotique :*
   (a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$
   (b) Démontrer que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique (aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$) d'équation $y = x + \alpha$ où l'on précisera la valeur du réel α.
   (c) Justifier que la courbe représentative de f admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

5. *Prolongement en $x = 2$:*
   On définit une nouvelle fonction h sur $]-1; +\infty[$ par :
   $$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 2 \\ a & \text{si } x = 2 \end{cases}$$
   (a) Déterminer une valeur du réel a qui rende h continue sur $]-1; +\infty[$.

   Dans la suite du problème, on considérera que h est effectivement continue et que a a été choisi en conséquence

   (b) Vérifier que, pour tout $x > -1$ on a :
   $$h(x) = x - 7 + \frac{16}{x+1}$$
   (c) Démontrer que h est strictement croissante sur $[3; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-1; 3]$
   Indication : On pourra exploiter (sans obligation) la formule de calcul du taux d'accroissement :
   $$\tau_{a;b}(h) = \frac{h(b) - h(a)}{b - a}$$
   (d) Démontrer que h réalise une bijection de $[3; +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$.
   (e) Ecrire un script Python qui calcule une image $h(x)$ lorsque x est fourni en entrée.

6. *Courbes synthétiques*
   (a) Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{H}$ de la fonction h dans un repère orthogonal.
   (b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathcal{H}$ avec les axes de coordonnées de votre repère puis marquer ces points sur votre graphique.
   (c) Compléter le graphique avec les éventuelles droites asymptotes à $\mathcal{H}$. On justifiera de leur existence.

Problème III :

Soit $a > 1$ un entier fixé. On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_{n+1} = S_n + |a - n|$$

1. Justifier que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S_n \geq 0$
3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} |a - k|$$

4. *Etude des valeurs* $n \leq a$

   On suppose dans cette question que $n \geq 1$ est un entier inférieur à a.
   (a) Justifier que, pour tout $k \leq n$, on a $|a - k| = a - k$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a - k| = an - \frac{n(n-1)}{2}$
   (c) Etablir enfin que, dans ce cas, $S_n = \frac{n}{2}(2a + 1 - n)$
5. *Etude des valeurs* $n \geq a$

   On suppose dans cette question que $n \geq 1$ est un entier supérieur à a.
   (a) Justifier que, pour tout $k \geq a$, on a $|a - k| = k - a$.
   (b) En déduire que l'on a :

$$\sum_{k=a}^{n} |a - k| = \frac{n^2 + (1 - 2a)n + a^2 - a}{2}$$

   (c) Démontrer que, dans ce cas, on a finalement :

$$S_n = \frac{a}{2}(a + 1) + \frac{n^2 + (1 - 2a)n + a^2 - a}{2}$$

6. Retour au cas général : Proposer une forme explicite en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et $a > 1$ de S_n
7. RECOPIER et compléter le script Python suivant pour qu'il calcule des termes de S_n :

```
from math import*
n=int(input("rang de S"))
a=int(input("valeur de paramètre"))
S=........................
for .......................
        S= ...................
print(....................)
```

Exercice IV : PsyChocolat

Dans ce problème, on cherche à étudier une technique d'interrogatoire consistant à obtenir une proportion de véritables réponses à une question à laquelle la population ne répondrait pas avec franchise.
Par exemple, dans un groupe de manifestants, on cherche à savoir quelle proportion x a participé à des dégradations. On imagine que (presque) personne ne saurait répondre directement (et honnêtement) à la question "*avez-vous participé aux dégradations durant la manifestation ?*".

Au lieu de cela, on va introduire, pour l'enquête, une question secondaire, plus engageante, ainsi qu'un générateur d'aléatoire : un dé. Ce dernier est supposé cubique, aux faces numérotées de 1 à 6 et non pipé (bien équilibré). On fixe l'entier k compris, strictement, entre 1 et 6, supposé connu. Le protocole d'interrogatoire sera alors le suivant :

1° On demande à un manifestant "*avez-vous participé aux dégradations durant la manifestation ?*" tout en l'invitant à ne pas répondre.
2° On donne le dé au manifestant et on lui demande de le lancer et de conserver le résultat secret.
3° Si le résultat du dé est inférieur ou égal à k, le manifestant devrait donner la réponse à la question posée initialement.
Sinon, le manifestant devra répondre à la question :"*Aimez-vous le chocolat ?*".
Un simple *oui* ou *non* suffit à valider le protocole et il ne sera jamais demandé de fournir le résultat obtenu au dé.

On admet que la valeur de k aura été choisie de sorte que, toute personne interrogée répondra effectivement avec sincérité à l'issue du protocole. L'interrogateur n'est pas en mesure de connaître le résultat du dé, et donc la question à laquelle la réponse aura été obtenue.

Partie A : Etude du protocole d'interrogatoire sur une personne

On admet dans cette partie que la proportion de personnes qui aime le chocolat est de 90 $\%$ et que cette donnée n'a aucun lien de dépendance avec la participation éventuelle à des dégradations dans des manifestations.
On considère maintenant l'un des manifestants pris au hasard et on applique le protocole d'interrogatoire.
On désignera par Q l'événement *la personne interrogée doit répondre à la question "avez-vous participé aux dégradations durant la manifestation ?"*. On notera Y l'événement *la personne interrogée a répondu "oui"*

1. Déterminer, en fonction de k, la valeur de $\mathbb{P}(Q)$, probabilité de réaliser l'événement Q.
2. Dresser un arbre de probabilités, relatif à cette situation.
3. Calculer, en fonction de x et de k la probabilité de l'événement Y. On notera r cette probabilité dans toute la suite.
4. Justifier que l'on a :
$$0,9 - 0,15k \leq r \leq 0,9 + \frac{k}{60}$$
Pour quelle valeur de k l'amplitude de cet encadrement est-elle la plus grande ? Quelle est alors la valeur d'amplitude correspondante ?
5. Déterminer une expression de x en fonction de r et de k.

Partie B : Bilan de l'étude

On suppose que toutes les personnes ont été interrogées. On considère alors que la valeur r obtenue en partie A est connue et s'exprime :
$$x = 0,9 + \frac{6r - 5,4}{k}$$

1. Pour $k = 3$, justifier que $x = 2r - 0,9$ puis, en déduire une estimation de la proportion de manifestants ayant contribué aux dégradations si 80 $\%$ des manifestants ont répondu *oui* à l'issue du protocole.
2. RECOPIER puis compléter le tableau suivant (aucune justification n'est demandée) donnant des valeurs de x :

x	$r = 0,6$	$r = 0,75$	$r = 0,95$
$k = 2$			
$k = 4$			
$k = 5$			

[D'après technique d'interrogatoire réellement existante]