.

Coefficients binomiaux, loi binomiale

Exercice $\boxed{1}$ On dispose de 15 livres distincts. On demande à une personne de les ranger dans un compartiment de bibliothèque par ordre de préférence (personnelle). On suppose que les livres seront disposés -tranche visible- les uns à côté des autres. De combien de façons peut-on ainsi obtenir de rangements ?

Exercice $\boxed{2}$ Dans une salle de classe, on dipose d'autant de tables qu'il n'y a d'élèves. On appelle plan de classe toute disposition conduisant à placer un et un seul élève par table. Combien de plans de classe peut-on ainsi former dans une classe de 42 étudiants ?

Exercice $\boxed{3}$ **des Anagrammes**

On appellera *anagramme* de ω toute réorganisation des symboles (d'un alphabet) constituant l'écriture de ω. En mathématiques, cette considération se fait indépendamment du sens donné au mot.

Ainsi, ETC est un anagramme de ECT (les deux mots ont du sens en français), de même que TAHC est un anagramme (mathématiquement) de CHAT.

1. Combien peut-on dénombrer d'anagrammes du mot TABLE ? Du mot CHAISE ?
2. Combien d'anagrammes le mot ETUDIER possède-t-il ? Le mot INFINITIF ?
3. Combien d'anagrammes le mot ECONOMIE possède-t-il ?

Exercice $\boxed{4}$ Dans un jeu de cartes, les règles permettent de considérer des *couleurs* au nombre de n (avec $n \geq 2$). On nomme *identité couleur* l'ensemble des couleurs portées sur chaque carte. L'ordre et la répétition des couleurs n'est pas prise en compte dans la détermination de l'identité couleur d'une carte. Sachant qu'il existe des cartes incolores :

1. Combien peut-on dénombrer d'identités couleurs distinctes possibles au total ?
2. Combien d'identités bicolores peut-on distinguer ?
3. Combien d'identités tricolores peut-on distinguer ?

   Remarque : le célèbre jeu de cartes Magic The Gathering® est un exemple avec $n = 5$ et la variante dite du commander met souvent en scène des jeux à identité tricolores tandis que les formats compétitifs usent plus fréquemment de jeux à identités bicolores.
4. On pourra vérifier que dans le cas particulier de la remarque, on distingue autant d'identités bicolores que tricolores. Est-ce la seule valeur de n permettant d'obtenir ce constat ?

Exercice $\boxed{5}$ Une course de chevaux est organisée avec 15 concurrents. Les parieurs s'intéressent aux ordres d'arrivées de ces chevaux sur une course donnée.

1. On connaît les numéros des cinq premiers arrivés. De combien de façons peut-on ranger ces cinq chevaux pour former des *quintés* ?
2. On connaît les numéros des trois premiers arrivés (ils forment un *tiercé*). De combien de façon peut-on ranger les douze chevaux qui suivent ?
3. On suppose que chaque cheval a les mêmes chances de se placer dans une position du classement que les autres.
   (a) Ayant misé sur un *quinté*, quelle est la probabilité d'obtenir un billet gagnant dans l'ordre ? dans le désordre ?
   (b) Ayant misé sur un *tiercé*, quelle est la probabilité d'obtenir un billet gagnant dans l'ordre ? dans le désordre ?

Exercice $\boxed{6}$ Déterminer le nombre de grilles de *loto* ® possibles, sachant qu'une telle grille est remplie en cochant cinq numéros du quadrillage principal, consitué de 49 nombres, plus un numéro joker pris entre les valeurs 1 à 10.

Exercice $\boxed{7}$ Déterminer le nombre de grilles d'*euromillion* ® possibles, sachant qu'une telle grille est remplie en cochant cinq numéros du quadrillage principal, consitué de 50 nombres, plus deux numéros étoiles pris entre les valeurs 1 à 11.

Exercice 8 On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On demande d'en extraire, simultanément, un nombre $k \in [\![1; n]\!]$. Une fois extraites, on note les nuémros des boules tirées dans l'ordre croissant.
Combien de listes de tirages disctinctes peut-on ainsi générer ?

Exercice 9 **Calculs de coefficients**

Calculer les valeurs suivantes :

série 1. a) $\binom{7}{4}$ b) $\binom{18}{2}$ c) $\binom{11}{6}$ d) $\binom{9}{2}$ e) $\binom{18}{16}$ f) $\binom{9}{3}$

série 2. a) $\binom{7}{3}$ b) $\binom{9}{4}$ c) $\binom{15}{12}$ d) $\binom{8}{6}$ e) $\binom{15}{3}$ f) $\binom{14}{2}$

Exercice 10 Comparer les valeurs de 11^n pour $n \leq 4$ avec les 4 premières lignes du triangle de Pascal. Explication ?

Exercice 11 Ecrire le développement de $(a+b)^3$ puis de $(a+b)^5$, pour a et b deux réels quelconques.

Exercice 12 Ecrire le développement de $(1-b)^6$ pour $b \in \mathbb{R}$

Exercice 13 Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(n-k) = \binom{n+1}{2}$

Exercice 14 Déterminer les valeurs de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ ainsi que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 15 Calculer les valeurs des sommations suivantes, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$:

série 1. **a)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}$ **b)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1}\binom{2n}{k}$ **c)** $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\binom{n+2}{k}$ **d)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k+2}$

série 2. **a)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}$ **b)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{n-k+1}$ **c)** $\displaystyle\sum_{k=2}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k-1}$ **d)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+2}\binom{n+5}{k+1}$

Exercice 16

1. Démontrer que, pour tous $p \leq n$ entiers naturels, on a $\displaystyle\binom{n+1}{p+1} = \frac{n+1}{p+1}\binom{n}{p}$
2. Calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$
3. Déterminer, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}$

Exercice 17 **calculs avec paramètres :** Calculer les valeurs suivantes, avec $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

série 1. **a)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x^{2k-1}$ **b)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^k$ **c)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n+1}{k}(-x)^{k+2}$ **d)** $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\binom{n+2}{k}2x^{k-1}$

série 2. **a)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}nx^k$ **b)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}3^k\binom{n}{k+1}x^k$ **c)** $\displaystyle\sum_{k=2}^{2n}\binom{2n}{k-1}x^{k-1}$ **d)** $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\binom{n+2}{k+1}\frac{x^k}{k+2}$

Exercice $\boxed{18}$ On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_n = \binom{2n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer les 4 premiers termes de cette suite puis déterminer les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

Exercice $\boxed{19}$ On dispose d'un jeu de 52 cartes usuel. On le mélange et on procède au tirage (sans triche) de 5 cartes du paquet successivement et sans remise.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une main de cartes ayant même couleur (au sens $\{\spadesuit\ ;\ \heartsuit\ ;\ \diamondsuit\ ;\ \clubsuit\}$) ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une suite de cartes qui se suivent (sans examiner leur couleur) ?

Exercice $\boxed{20}$ Une grille de *loto* ® coûte 2 euros. Un joueur décide de cocher un numéro supplémentaire sur la grille principale. Le buraliste lui demande alors de payer 10 euros de surcoût. S'agit-il d'un tarif honnête ? Un argument combinatoire est attendu.

Autour de la loi Binomiale

Exercice $\boxed{21}$ **[Rédaction]** On lance douze fois un dé à 4 faces supposé équilibré et on cherche à obtenir des as (c'est-à-dire des *un*).

On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout résultat de cette expérience, associe le nombre d'as effectivement obtenus.

1. Quelle est l'épreuve de Bernoulli générique ?
2. En rédigeant soigneusement, justifier que X suit la loi binômiale de paramètres $n = 12$ et $p = 0,25$.
3. Calculer explicitement la probabilité d'obtenir exactement quatre as au cours de cette expérience.

Exercice $\boxed{22}$ On dispose d'une urne contenant trois boules rouges et six boules noires, toutes indiscernables au toucher. On considère que l'on tire au hasard, avec remise, et en remélangeant avant chaque nouveau tirage, cinq boules successivement dans cette urne.

On notera X le nombre de boules rouges obtenues et Y le nombre de boules noires obtenues.

1. Justifier que X suit une loi $\mathcal{B}(n; p)$ dont on précisera les paramètres.
2. Quelle est la loi suivie par Y ?
3. Calculer les valeurs de $\mathbb{P}[X = 2]$ ainsi que $\mathbb{P}[Y = 3]$. Que constatez-vous ?
4. Donner les valeurs d'espérance de X et de Y.

Exercice $\boxed{23}$ On considère un dé usuel (non truqué). On le lance 10 fois et on note S le nombre de fois où le *six* est obtenu. Déterminer la loi de S (en justifiant) puis en fournir l'espérance et la variance.

Et en Python ?

Exercice $\boxed{24}$ On considère chargées les bibliothèques d'importation usuelles `math` et `numpy`

1. Ecrire une fonction `fac` qui teste si n fourni en entrée est un entier naturel et renvoie, le cas échéant, la valeur de $n!$
2. Utiliser la fonction `fac` (supposée fonctionnelle) pour programmer le calcul de $\binom{n}{k}$
3. Proposer un programme qui calcule $\binom{n}{k}$ avec un boucle `for` et utilisant la formule de Pascal.