.

Compléments d'Analyse

Exercice $\boxed{1}$ (**La fonction** `floor`)

On rappelle que l'on définit la fonction *floor*, appelée en français *partie entière* comme :
si l'on note $\lfloor x \rfloor$ l'image par *floor* de x, l'unique valeur de $\mathbb{N}$ associée à x par cette fonction vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

On en admet le bien-fondé.

1. Etablir que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$
2. Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty$. Quelle est la limite de $\lfloor x \rfloor$ en $-\infty$?
3. Justifier que $\lim\limits_{x \to 0} x \lfloor x \rfloor$ existe dans $\mathbb{R}$ et en donner sa valeur.
   La fonction $x \mapsto x \lfloor x \rfloor$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? justifier.
4. Déterminer un encadrement de $x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ pour $x \neq 0$ puis démontrer que : $\lim\limits_{x \to 0} x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor = 1$
5. La fonction $\varphi : x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ admet-elle des limites en $+\infty$ et en $-\infty$? Justifier.

Exercice $\boxed{2}$ (**Encore** `floor`)

On définit la fonction f par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x - \lfloor x \rfloor}{\lfloor x \rfloor + 1} \end{array}$$

1. Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$
2. Démontrer que f est positive sur $\mathbb{R}_+$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Représenter schématiquement la courbe de f sur $[n; n+1[$.
   Quelle est la nature de f sur un tel intervalle ?
4. Etablir que $\forall x \geq 1 \quad f(x) \leq \dfrac{1}{x}$
5. En déduire que f admet une limite, que l'on déterminera, en $+\infty$.
6. Peut-on dire que f est monotone ?

Exercice $\boxed{3}$ Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$. Que dire de la limite en 0 ?

Exercice $\boxed{4}$ Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{\lfloor x^2 \rfloor}{x^2}$. Que dire de la limite en 0 ?

Exercice $\boxed{5}$ Démontrer que tout polynôme de degré trois admet au moins une racine réelle.
Généraliser aux polynômes de degré impairs.

Exercice $\boxed{6}$ On donne $p(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$ défini pour $x \in \mathbb{R}$. Déterminer le nombre exact de solution réelles de l'équation $p(x) = 0$

Exercice $\boxed{7}$ On se donne $f(x) = \sqrt{x^3 - x + 1}$ définie sur $\mathbb{R}$

1. Déterminer le nombre de solutions de $x^3 - x + 1 = 0$.

2. Justifier qu'il existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que f soit bien définie sur $[\alpha\ ;\ +\infty[$.
   On notera a la plus petite valeur possible pour α, en admettant son existence pour la suite.
3. Etudier les variations de f sur $I = [a\ ;\ +\infty[$ et donner l'intervalle image $J = f(I)$
4. La fonction f réaliste-elle une bijection de I dans J ?

Exercice $\boxed{8}$ Avec une suite

Soit $-1 < a < 0$. On définit une suite (u_n) par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = {u_n}^2 + u_n$.

1. Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. On pose $f(x) = x^2 + x$. Vérifier que $f(]-1;0[) \subset]-1;0[$
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 < u_n < 0$
4. Etudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite éventuelle.

Exercice $\boxed{9}$ Avec une (autre) suite

Soit $-1 < a < 0$. On définit une suite (u_n) par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{2+u_n}{u_n - 1}$.

1. On pose $f(x) = \dfrac{2+x}{x-1}$. Vérifier que $f(]1;+\infty[) \subset]1;+\infty[$
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \ \ u_n > 1$
3. Résoudre l'inéquation $f(x) - x > 0$ d'inconnue $x > 1$ et en déduire les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
4. Etudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite éventuelle.

Exercice $\boxed{10}$ On donne $f(x) = \sqrt{-3x+5}$. Déterminer $I = \mathcal{D}_f$ puis justifier que f réalise une bijection de I dans $f(I)$.
Déterminer ensuite la bijection réciproque.

Exercice $\boxed{11}$ On donne $f(x) = \sqrt{2x-3}$. Déterminer $I = \mathcal{D}_f$ puis justifier que f réalise une bijection de I dans $f(I)$.
Déterminer ensuite la bijection réciproque.

Exercice $\boxed{12}$ Avec des SI

On donne la fonction h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 3x - 2 & \text{si } \ x \leq 1 \\ \dfrac{x-5}{x} & \text{si } \ x > 1 \end{cases}$$

1. Ecrire un script Python permettant de calculer des images $h(x)$ lorsque le réel x est donné en entrée.
2. Etudier la continuité ainsi que la dérivabilité de h sur $\mathbb{R}$
3. Résoudre l'équation $h(x) = m$ pour $m \in \mathbb{R}$ et en déduire $J = h(\mathbb{R})$
4. La fonction h réalise-t-elle une bijection de $\mathbb{R}$ dans J ?
   Si oui, explicitez la bijection réciproque.

Exercice $\boxed{13}$ Avec des SI

On donne la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - x\sqrt{x} & \text{si } \ x \geq 0 \\ \dfrac{3x+1}{x} & \text{si } \ x < 0 \end{cases}$$

1. Ecrire un script Python permettant de calculer des images $g(x)$ lorsque le réel x est donné en entrée.
2. Etudier la continuité ainsi que la dérivabilité de g sur $\mathbb{R}$
3. Justifier que la courbe représentative de g admet une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$, mais qu'en revanche, elle n'en a pas au voisinage de $+\infty$.

4. Démontrer que g est bijective de $\mathbb{R}_-^*$ dans $]-\infty;3[$ et en déterminer la bijection réciproque.
5. Etablir que $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ mais que g n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice $\boxed{14}$ D'après sujet de concours EC

On donne $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ de variable réelle.

1. Vérifier que h est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$
2. Etudier la parité de h
3. Dresser le tableau complet des variations de h sur $[0;+\infty[$
4. Justifier que h est bornée sur $\mathbb{R}$ et déterminer ses extrema (globaux)
5. Déterminer l'ensemble S des réels m pour lesquels l'équation $h(x) = m$ possède au moins une solution.
6. Etablir enfin que h réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans S et expliciter la bijection réciproque h^{-1}

Exercice $\boxed{15}$ mini-problème

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 3$.
   (a) Démontrer que $g(x) = 0$ possède une solution unique que l'on notera α dans $\mathbb{R}$
   (b) Dresser le tableau des signes de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$
2. On pose $f(x) = \dfrac{2x^3+3}{x^2-1}$
   (a) Déterminer le domaine de définition de f puis justifier de la dérivabilité de f sur ce domaine.
   (b) Déterminer la dérivée f' de f et vérifier que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\} \quad f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$$
   (c) Dresser le tableau des variations complet de f et vérifier que f réalise un minimum local valant $\dfrac{3(2\alpha+3)}{\alpha^2-1}$

Exercice $\boxed{16}$ Exercice théorique

Démontrer que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et vérifie $\forall x \in \mathbb{R}\ \ f(x)^2 = 1$ alors f est en fait constante.

Exercice $\boxed{17}$ Exercice théorique

Soit f continue de $[0;1]$ dans $[0;1]$. Démontrer que f possède alors nécessairement un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha \in [0;1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$