.

Exponentielle et logarithme

Logarithme népérien pour attendre

Exercice $\boxed{1}$ Déterminer les domaines (réels) d'existence des expressions littérales suivantes :

série 1. $a)\ \ln(x^2)\quad b)\ \ln(2x-3)\quad c)\ \ln\left(\dfrac{x-1}{x-3}\right)\quad d)\ \ln(x^2+4x)\quad e)\ \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

série 2. $a)\ \ln|x|\quad b)\ \ln(4-3x)\quad c)\ \ln\left(\dfrac{2x+1}{3x}\right)\quad d)\ \ln(x^2-6x)\quad e)\ \dfrac{\ln(1-x)}{x+1}$

Exercice $\boxed{2}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ Etudier complètement la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} + \ln(2x)$

indication : On pourra utiliser le résultat de cours $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$

Exercice $\boxed{3}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ Etudier complètement la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x)} + 2$

indication : On pourra démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $\ln(\alpha) + 2 = 0$ et admettre que $\alpha \approx 0,14$

Exercice $\boxed{4}$ Simplifier les écritures de nombres suivantes :

série 1. $A = \ln 3 + 2\ln 9$ $\quad B = \ln 7 + \ln 5 + \ln\dfrac{1}{35}$ $\quad C = \ln 9 + \ln 4 - \ln 36$

$D = 2\ln\frac{1}{4} + 3\ln 2$ $\quad E = 2\ln\left(\sqrt{2}+1\right) + \ln\left(-2\sqrt{2}+3\right)$

série 2. $A = \ln 25 + 2\ln 5 - \ln\frac{1}{5}$ $\quad B = \ln 12 - \ln 6 + \ln 2$ $\quad C = \frac{1}{2}\ln 9 - \ln 3$

$D = \ln\sqrt{7} + \ln\left(2\sqrt{7} + \frac{3}{\sqrt{7}}\right)$ $\quad E = \ln 32 + \ln\frac{1}{3} - \ln 2$

Exercice $\boxed{5}$ Résoudre les (in)équations suivantes :

série 1. $a)\ \ln(-3x) = \ln(x^2-4)\quad b)\ \ln(x-2) \leq \ln(2x-1)\quad c)\ \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) > \ln(x^2-2x)$

$d)\ \ln(x^2+4x) \leq \ln\frac{1}{4}\quad e)\ \ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right) = \ln(x-1) - \ln(x+2)\quad f)\ \ln(3x^2-x-2) \geq \ln(6x+4)$

série 2. $a)\ \ln(x-2) = \ln(x^2-2)\quad b)\ \ln(x^2-x) \leq \ln x + \ln(x-1)\quad c)\ \ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right) \geq \ln x$

$d)\ \ln(-3x) \geq \ln(x^2-4)\quad e)\ \ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11)\quad f)\ \dfrac{1}{2}\ln(2x) = \ln(3-x) - \ln\sqrt{x+1}$

Exercice $\boxed{6}$ On donne une fonction f définie sur $]0; +\infty[$ s'écrivant :

$$f(x) = ax + b + c\ln x$$

où a, b et c sont trois réels fixés. On notera $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Par ailleurs, on sait que :

- la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point de coordonnées $(1; 1)$
- la courbe $\mathcal{C}$ possède une tangente horizontale en $x = 2$

- f possède un maximum global de $2\ln 2$ sur $\mathbb{R}_+^*$

1. Déterminer les valeurs de a, b et c puis dresser le tableau complet des variations de f.
2. La fonction f est-elle concave sur $\mathbb{R}$? Justifier.

Exercice $\boxed{7}$ On définit la fonction f sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x^2(1 - \ln x)$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$.
Etablir que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et indiquer la valeur de $f'(0)$.

Exercice $\boxed{8}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ Soit f définie sur $I =]1; +\infty[$ par $f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$.

1. Démontrer que f est strictement croissante sur I
2. Déterminer l'ensemble S des réels m pour lesquels $f(x) = m$ possède une solution unique sur I. En déduire $f(I)$.
3. Justifier que f réalise une bijection de I dans S.

Exercice $\boxed{9}$ On définit la fonction h par $h(x) = x - \ln\left(2 + \dfrac{1}{x}\right)$ pour $x > 0$.

1. Déterminer les limites de h en 0 et en $+\infty$.
2. Démontrer que h admet, pour sa courbe $\mathcal{C}_h$, une asymptote oblique $d : y = x - \ln 2$
3. Etudier les positions relatives de d avec $\mathcal{C}_h$.

Exercice $\boxed{10}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ soient f et g deux fonctions définies sur $I = [1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

1° a) Vérifiez que f et g sont bien définies sur I.
   b) Déterminez les variations de f ainsi que celles de g sur I.
   c) Calculez les limites de f et g en $+\infty$ et en déduire les tableaux complets de variations de chacune des deux fonctions.
   d) Les courbes représentatives de f et de g possèdent-elles des asymptotes notoires ? Jusitifer.
   e) Démontrer que la courbe représentative de f est en-dessous de celle de g sur I.

2° Etablir que pour tout réel $x \geq 1$:

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$$

3° a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.
   b) En déduire la limite en $+\infty$ de (v_n) définie pour $n \geq 1$ par : $v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$
   On prendra soin de réécrire v_n à l'aide du symbole Σ.

Exercice $\boxed{11}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ **D'après ESCP - 2013**
On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) - 2x + 3$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

1. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Que pouvez-vous en déduire sur la courbe $\mathcal{C}$?
   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel $x > 0$ puis dresser le tableau des variations de f.
   On donnera, en particulier, les limites aux bornes ainsi que la valeur de $f(\frac{1}{2})$ pour laquelle on pourra utiliser $\ln 2 \approx 0,7$
3. Etablir que f est concave sur $]0; +\infty[$
4. (a) Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1
   (b) Justifier sans calcul que $\mathcal{T}$ est située au-dessus de $\mathcal{C}$ sur $]0; +\infty[$
5. (a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β dans $]0; +\infty[$. On prendra $\alpha < \beta$.
   (b) Justifier que $1 < \beta < 2$
6. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ (on pourra utiliser $\alpha \approx 0,06$)

Exponentielle fait des omelettes sans casser d'e

Exercice $\boxed{12}$ Etudier complètement la fonction $ch : x \mapsto \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ (la notation ch pourra être réexploitée ultérieurement)

Exercice $\boxed{13}$ Etudier complètement la fonction $sh : x \mapsto \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ (la notation sh pourra être réexploitée ultérieurement)
La fonction $2sh$ faisait l'objet de l'étude d'un problème dans le sujet ECRICOME 2011

Exercice $\boxed{14}$ Simplifier les écritures de nombres suivantes :

série 1. $A = \ln\sqrt{e^5}$ $\quad B = \left(e^{2x}\right)^3\left(e^{-x}\right)^6$ $\quad C = \ln e^{-3} + e^{\ln 5}$ $\quad D = \dfrac{e^{2+\ln 8}}{e^{3+\ln 4}}$ $\quad E = 3^{-\frac{1}{\ln 3}}$

série 2. $A = \ln\left[\left(e^4\right)^3\right]$ $\quad B = \left(e^{4x}\right)^{-2}\left(e^x\right)^5$ $\quad C = e^{\ln 7} - \ln e^{-5}$ $\quad D = \dfrac{e}{e^{2+\ln 3}}$ $\quad E = 2^{\frac{1}{\ln 4}}$

Exercice $\boxed{15}$ Résoudre les (in)équations suivantes :

série 1. $a)$ $e^{2x^2-1} \geq 3$ $\quad b)$ $e^x - 4e^{-x} < 0$ $\quad c)$ $3e^{2x} + e^x - 4 > 0$
$d)$ $\ln(e^x+1) - \ln(e^{-x}+1) = 1$ $\quad e)$ $2e^{-x} = \dfrac{1}{e^x+2}$

série 2. $a)$ $e^x + 4e^{-x} = 5$ $\quad b)$ $(e^x-1)(e^x-4) > 0$ $\quad c)$ $4e^{2x} - e^x + 2 = 0$
$d)$ $\dfrac{e^x}{1+e^x} \geq \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ $\quad e)$ $\ln(2-e^x) - \ln(3+e^{-x}) = 2$

Exercice $\boxed{16}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ On donne une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ s'écrivant :

$$f(x) = (ax+b)e^{-x}$$

où a et b sont deux réels fixés. On notera $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Par ailleurs, on sait que :
- la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en $x = -2$
- la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des ordonnées en $y = 2$
- la courbe $\mathcal{C}$ possède une tangente horizontale en $x = -1$

1. Déterminer les valeurs de a et b puis déterminer les variations de f.
2. Etablir que f possède un maximum global sur $\mathbb{R}$ dont on précisera la valeur (exacte) mais pas de minimum (ni global ni local).
3. Démontrer que la fonction f obtenue possède un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées exactes.

Exercice $\boxed{17}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ On définit la fonction f comme $f(x) = x + \ln(1+3e^{-x})$ pour $x \in \mathbb{R}$.
1. Vérifier que f est bien définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $m = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Quelle est la limite de f en $+\infty$?
3. Justifier que f possède deux droites asymptotes : l'une, oblique, au voisinage de $+\infty$ et l'autre, horizontale, au voisinage de $-\infty$.
4. Vérifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]m; +\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

Exercice $\boxed{18}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$
1. Vérifier que f est dérivable (à droite) en 0. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Déterminer la droite tangente $\mathcal{T}$ à la courbe de f en le point d'abscisse 0.
3. Démontrer que, pour tout $x > 0$ on a $f'(x) = \dfrac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$
4. Déterminer les éventuelles droites asymptotes à la courbe de f
5. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$ et tracer l'allure de la courbe de f ainsi que son/ses asymptote(s) et la tangente $\mathcal{T}$

Exercice $\boxed{19}$ limites avec exponentielle et logarithme

Calculez les limites suivantes :

Série 1. $a)\ \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x - x$ $b)\ \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x^2}$ $c)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{2}x}}{1+x^2}$ $d)\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ $e)\ \lim\limits_{x\to 1} \left|\dfrac{\ln(1-x)-x}{x\ln x}\right|$

Série 2. $a)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\ln|x|}$ $b)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}\ln x}{1+\dfrac{1}{x}}$ $c)\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x$ $d)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\ln x}{e^x\ln(x^5)}$ $e)\ \lim\limits_{x\to 0^+} \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}$

Exercice $\boxed{20}$ $\bullet\Theta^{\mathrm{C}\sharp}$ une limite célèbre

Soit a un réel donné, quelconque.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+ax)}{x}$
2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{a}{n}\right)$
3. Déterminer enfin la limite de la suite définie par $u_n = \left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n$

Exercice $\boxed{21}$ Sans calculatrice

Un investisseur pointilleux a déposé une somme d'argent $C > 0$ en euros au 1er Janvier 2009 sur un compte rémunéré à hauteur de $\tau\%$ annuel mais obtient, après âpres négociations, que son placement fructifie au prorata exact du temps passé sur le compte. Il considère ainsi que, si t désigne le temps écoulé en années, on a $s(t) = C(1+\tau)^t$ qui désigne la somme d'argent présente sur son compte.

1. Vérifier que si $t \in \mathbb{N}$ on retrouve bien la valeur attendue (modéliser alors par une suite bien choisie)
2. Notre investisseur souhaite que son capital double : démontrer que son temps d'attente pour atteindre son objectif est indépendant de C.
3. On suppose ici que $C = 10\ 000$ et $\tau = 2,5\%$. Déterminer la durée exacte (en années décimales) à partir de laquelle notre investisseur pourra retirer au moins 12 500 euros.
   Ecrire une instruction SciLab de console qui permettra d'afficher un résultat numérique approché.
4. Interpréter la valeur approchée $t_0 \approx 9,0368$ comme date dans le contexte du problème.

Exercice $\boxed{22}$ La fonction W de Lambert

On définit une fonction $w : x \mapsto xe^x$ pour $x \geq -1$

1. Vérifier que w est injective sur $I = [-1; +\infty[$ et déterminer l'intervalle image de I par w que l'on notera J
2. Démontrer que w réalise une bijection de I dans J ; la bijection réciproque, notée W, se nomme *fonction de Lambert*
3. Dresser le tableau des variations de W sur J. La fonction W est-elle dérivable sur J ? (justifier)
4. *Limite hors-programme :* Déterminer $W'(e)$ (*indication :* comment dériver $(w \circ W)(x)$?)