.

Systèmes Linéaires et Matrices

Exercice $\boxed{1}$ Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1) : \left\{\begin{array}{lll} 2x & -4y & = 5 \\ -3x & +7y & = -1 \end{array}\right. \quad ; \quad (S_2) : \left\{\begin{array}{lll} 2x & +y & = 2 \\ 3x & -5y & = 1 \end{array}\right. \quad ; \quad (S_3) : \left\{\begin{array}{lll} 2x & -y & = -6 \\ 3x & -3y & = 9 \end{array}\right.$$

Exercice $\boxed{2}$ Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1) : \left\{\begin{array}{llll} 2x & -y & +2z & = 1 \\ -3x & +2y & -z & = 3 \\ -x & +y & +z & = 4 \end{array}\right. \quad ; \quad (S_2) : \left\{\begin{array}{llll} 2x & +y & -z & = 1 \\ x & +3y & +2z & = 4 \\ x & +2y & +z & = 2 \end{array}\right. \quad ; \quad (S_3) : \left\{\begin{array}{llll} 2x & +y & -z & = 1 \\ x & -y & +z & = 2 \\ 4x & +y & +z & = 3 \end{array}\right.$$

Exercice $\boxed{3}$ **En vrac!**

Réécrire chacun des systèmes suivants sous forme matricielle puis étudier l'ensemble de leurs solutions.

$$(S_1) : \left\{\begin{array}{rcl} 2y - z + x & = & -2 \\ y + x - 2z & = & 0 \end{array}\right. \quad ; \quad (S_2) : \left\{\begin{array}{rcl} x + z & = & -1 \\ x - 2z & = & 0 \\ z - x & = & 1 \end{array}\right. \quad ; \quad (S_3) : \left\{\begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 3z \\ y & = & 3x - z \\ 2z + x & = & 3x - y \end{array}\right.$$

Exercice $\boxed{4}$ **Un 4×4 pour la route**

Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +3y & -z & -2t & = & 4 \\ x & +9y & -8z & -2t & = & -3 \\ -x & +9y & +8z & -t & = & -2 \\ x & -8y & & +t & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice $\boxed{5}$ **Et maintenant, vous les préférez comment ?**

Réécrire matriciellement ces systèmes puis les résoudre. On pourra utiliser la fomrule d'inversion des matrices 2×2.

$$S_1 : \left\{\begin{array}{rrcc} \frac{1}{2}x & -\frac{4}{7}y & = & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{5}x & +\frac{2}{3}y & = & \frac{1}{7} \end{array}\right. \qquad S_2 : \left\{\begin{array}{rrcl} x & +2y & = & \frac{1}{11} \\ \frac{2}{9}x & -\frac{1}{7}y & = & 3 \end{array}\right. \qquad S_3 : \left\{\begin{array}{lll} \frac{4}{7}x & +\frac{2}{9}y & = -\frac{2}{5} \\ -2x & +\frac{3}{8}y & = \frac{5}{6} \end{array}\right.$$

Exercice $\boxed{6}$ **systèmes paramétrés**

1. Réécrire matricellement les systèmes suivant :

$$(S_1) : \left\{\begin{array}{lll} mx & +4y & = 5 \\ -3x & +my & = -1 \end{array}\right. \quad ; \quad (S_2) : \left\{\begin{array}{lll} (1+m)x & +y & = 0 \\ 2x & +y & = 1+m \end{array}\right.$$

2. Au moyen de la méthode de votre choix, résoudre (S_1) et (S_2) suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}$.

Exercice $\boxed{7}$ Résoudre les systèmes suivants en changeant d'inconnues :

$$(S_1) : \left\{\begin{array}{lll} xy & +y & = 1 \\ 3xy & -2y & = -1 \end{array}\right. \quad ; \quad (S_2) : \left\{\begin{array}{lll} x^2 & -xy & = 3 \\ 2x^2 & +5xy & = -1 \end{array}\right. \quad ; \quad (S_3) : \left\{\begin{array}{ll} 1 + xy & = 2 \\ yx(1-y) & = -2 \end{array}\right.$$

Exercice $\boxed{8}$ Résoudre les systèmes suivants en changeant d'inconnues :

$$(S_1) : \left\{ \begin{array}{lll} 3x\sqrt{y} & -4y & = 2 \\ -x\sqrt{y} & -y & = 5 \end{array} \right. \quad ; \quad (S_2) : \left\{ \begin{array}{lll} 3e^x & +2xy & = 4 \\ 4e^x & +7xy & = 3 \end{array} \right. \quad ; \quad (S_3) : \left\{ \begin{array}{ll} 4 - y\ln(x) & = 2 \\ (2+y)\ln(x) & = 5 \end{array} \right.$$

Exercice $\boxed{9}$ **Matrices : abord de multiplication**

Effectuez, lorsque possible, les calculs suivants :

1. $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 10 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 7 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Exercice $\boxed{10}$ **Etude légère d'une matrice** 3×3

A). Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - A$
2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}

B). Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Cacluler B^2 puis en déduire que $B^2 = B + 2I_3$
2. En déduire que B est inversible et déterminer son inverse B^{-1}

Exercice $\boxed{11}$ Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A est inversible puis déterminer son inverse.
2. Déterminer l'ensemble des matrices M qui commutent avec A.

Exercice $\boxed{12}$ Soit P un polynôme de degré *au plus 3* vérifiant $P(-1) = P(2) = 0$ et $P(0) = P(1) = -1$.

Déterminer les polynômes P vérifiant ces conditions.

Exercice $\boxed{13}$ •$\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ Soit P un polynôme de degré 3 vérifiant $P(1) = 1$, $P(2) = 2$, $P(-1) = 0$ et $P'(-2) = 0$.

Déterminer l'expression du polynôme P

Exercice $\boxed{14}$ •$\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = ax + b + \frac{\ln x}{x}$ avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

On sait que $f(1) = 0$ et $f'(1) = 3$. Déterminer les paramètres a et b et construire ainsi le tableau des variations de f.

Exercice $\boxed{15}$ •$\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ s'écrivant sous la forme $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ avec $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$.

On sait que $f'(-1) = f(-1) = 0$ et $f(0) = 1$.

Peut-on déterminer les réels a, b et c avec ces informations ? Si oui, les expliciter.

.

Exercice $\boxed{16}$ **D'après ESCP 2019 voie T**

Dans tout l'exercice, on note n un entier supérieur ou égal à 1 et $\overline{A}$ l'événement contraire d'un événement A.
On suppose que dans une certaine région, pendant une période donnée, seuls deux états météo sont possibles : le beau temps et le mauvais temps.
L'étude des bulletins météo du passé laisse penser que le temps qu'il fait un certain jour de cette période dépend du temps qu'il a fait la veille de la façon suivante :

- s'il fait beau un jour donné, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est égal à $\dfrac{4}{5}$;
- s'il fait mauvais un jour donné, la probabilité qu'il fasse mauvais le lendemain est égal à $\dfrac{2}{5}$.

On s'intéresse à une période débutant le jour 1, jour au cours duquel il a fait beau.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note :

- B_n l'événement : “il fait beau le jour n” ;
- $\overline{B}_n$ l'événement : “il fait mauvais le jour n” ;
- $u_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $v_n = \mathbb{P}\left(\overline{B}_n\right)$.

1. (a) Donner la valeur de u_1.
   (b) Déterminer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{\overline{B}_n}(B_{n+1})$.
2. (a) A l'aide de la formule des probabilités totales, établir la relation : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \dfrac{4}{5}u_n + \dfrac{3}{5}v_n$.
   (b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_{n+1} en fonction de u_n.
   (c) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de u_n en fonction de n.
   (d) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et interpréter ce résultat.
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $v_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{2}{5}v_n$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la matrice à une ligne et deux colonnes suivante : $X_n = (u_n \quad v_n)$.
   Déterminer la matrice carrée K, indépendante de n, qui vérifie la relation suivante :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, X_{n+1} = X_n K.$$
   (c) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, donner pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de X_{n+1} en fonction de X_1 et K.
   (d) En déduire l'expression (sous forme d'un tableau) de la matrice K^n en fonction de n.
4. (a) Soit U_n l'événement “il fait beau pendant les n premiers jours de la période considérée”. Calculer $\mathbb{P}(U_n)$.
   (b) Soit V_n l'événement “il fait beau au moins deux fois lors des n premiers jours de la période considérée”.
   Calculer $\mathbb{P}(V_n)$.