.

Lois usuelles finies

Exercice $\boxed{1}$ On se donne une urne contenant deux boules blanches et n boules noires ($n \in \mathbb{N}^*$). On procède à des tirages successifs avec remise des boules de cette urne. On note alors T la variable aléatoire renvoyant le nombre de boucles blanches obtenues.

1. En justifiant soigneusement, donner la loi de T. Rappeler les valeurs d'espérance et variance de T.
2. On joue à un jeu dans lequel on perd 2 euros par boule noire obtenue et on gagne $x > 0$ euros par boule blanche obtenue au cours de ces n tirages.
   Quelle valeur attribuer à x pour que ce jeu devienne équitable ?

Exercice $\boxed{2}$ On lance un dé à 10 faces (un $D10$), supposé non truqué, n fois ($n \in \mathbb{N}^*$) et on note X le nombre de fois où le nombre “un" est obtenu.

1. Rappelez la loi de X (en fonction de n). En donner l'espérance, la variance et l'écart-type.
2. On joue au jeu dans lequel un parieur paie $m > 0$ euros de droit d'entrée et est rémunéré 5 euros par “un" obtenu au cours des n lancers.
   Décrivez la loi du gain (algébrique) à ce jeu puis en donner l'espérance en fonction de m. Comment le rendre équitable ?

Exercice $\boxed{3}$ On considère une urne contenant $n \geq 2$ boules indiscernables au toucher, l'une étant rouge et les autres étant noires. On extrait de l'urne toutes les boules une à une sans remise. On définit R la variable aléatoire égale au nombre de tirage effectué lors de la prise de la boule rouge.

Déterminer la loi de R. On reconnaîtra une loi usuelle. Donner ainsi ses valeurs d'espérance et variance associée (en fonction de n).

Exercice $\boxed{4}$ Dans une famille de N enfants (avec $N \geq 1$), si l'on considère équiprobables et indépendantes les naissances de filles et de garçons, quelle est la loi de nombre X de filles ? Du nombre Y de garçons ?

Exercice $\boxed{5}$ Dans une population de 300 personnes prises au hasard, quelle est la probabilité d'avoir exactement trois personnes qui fêtent leur anniversaire le 23 mai ?

Exercice $\boxed{6}$ Lors d'une réunion entre douze membres d'équipe, règle est fixée qu'une décision est prise lorsqu'au moins trois quart de l'assemblée est unanime sur la décision à prendre.

Or, sur un sujet donné, la probabilité que chaque membre, indépendamment des autres, vote *Pour* une certaine décision est de $\dfrac{3}{4}$. Quelle est la probabilité qu'à l'issue de la réunion, le vote à propos de ce sujet amène un *Pour* ?

Exercice $\boxed{7}$ On dispose d'un dé truqué ayant une probabilité p de tomber sur la face 1. Après avoir effectué n lancés successifs et indépendants, on a admet qu'il a été possible d'attester que l'expérience réalisée soit une loi $\mathcal{B}(n; p)$ d'espérance $0,4$ et d'écart-type $0,6$.

Quelle est la probabilité d'obtenir un “un" avec ce dé ?

Exercice $\boxed{8}$ une variable aléatoire U suit une loi $\mathcal{U}[\![a; b]\!]$ d'espérance nulle et de variance 14.

Quelles sont les valeurs de a et b ? Proposez une expérience aléatoire réalisable avec des dés qui suive cette loi.

Exercice $\boxed{9}$ On considère un dé à six faces truqué vérifiant $p_k = kp_1$ où p_i désigne la probabilité (élémentaire) d'obtenir la face portant le numéro i.

1. Déterminer les valeurs de $p_1; p_2; \ldots; p_6$.
2. On lance ce dé 5 fois de suite et on note X le nombre de fois où le numéro 5 est obtenu.
   (a) En justifiant soigneusement, déterminer la loi de X.
   Préciser alors $X(\Omega)$ et l'expression de $\mathbb{P}[X = k]$ pour $k \in X(\Omega)$
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de X.
3. On lance le dé n fois (avec $n \in \mathbb{N}^*$). On note alors X_n la nombre de fois où 5 est obtenu.
   Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $\mathbb{P}[X >= 1] > 0,99$.

Exercice $\boxed{10}$ Une urne contient trois boules indiscernables au toucher : une noire, une blanche et une rouge.
On tire successivement, avec remise et en remélangeant $n \geq 3$ boules de cette urne et on note C le nombre de couleurs distinctes obtenues lors du tirage. Ainsi :
- $[C = 1]$ désigne l'événement " le tirage est unicolore"
- $[C = 2]$ désigne l'événement " le tirage est bicolore"
- $[C = 3]$ désigne l'événement " le tirage est tricolore"

1. Déterminer $\mathbb{P}[C = 1]$ en détaillant votre démarche.
2. Compléter la description de la loi de C.
3. Quelle est la probabilité que la première et la dernière boule tirée soient de la même couleur ?
4. Calculer les valeurs de $\mathbb{E}[C]$ et $\mathbb{V}[C]$

Exercice $\boxed{11}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite répartir n personnes dans trois hôtels $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$. Pour cela, chaque individu est amené, de façon équiprobable, dans l'un des trois hôtels.
On note X_i le nombre de personnes conduites à l'hôtel $\mathcal{H}_i$ (avec $1 \leq i \leq 3$).

1. Déterminer les lois de X_1, X_2 et X_3. Que constate-t-on ?
2. Que dire de $X_1 + X_2 + X_3$?
3. En déduire la loi de $X_i + X_j$ lorsque $i \neq j$ (entiers compris entre 1 et 3)
4. Déterminer pour $j \in [\![0; n]\!]$ et $k \in [\![0; n]\!]$ la valeur de $\mathbb{P}[(X_1 = j) \cap (X_2 = k)]$.
   Que pourrait-on dire alors des variables aléatoires X_1 et X_2 ?

Exercice $\boxed{12}$ **un problème de pneus**
On dispose d'une moto (deux roues) et d'une voiture (quatre roues) équipées de pneus de même nature. On considère que chaque pneu de chaque véhicule a une même probabilité $p \in]0; 1[$ de crever au cours de son trajet et ce, indépendamment de tous les autres pneus.
Chaque véhicule est en mesure d'arriver à destination si, et seulement si, au moins la moitié de ses pneus n'ont pas crevé.

1. Quel est, en fonction de p, le véhicule offrant la meilleure garantie (en termes de probabilités) d'arriver à destination dans ce contexte ?
2. Deux personnes embarquent respectivement dans la moto et la voiture pour effectuer un même trajet.
   On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de véhicules arrivant à destination. Déterminer la loi de X ainsi que son espérance (en fonction de p).

Exercice $\boxed{13}$ *Espérance Binomiale - calcul guidé* On propose de déterminer l'espérance de la loi $\mathcal{B}(n; p)$ par un calcul.
1. Etablir la formule du cours pour $n = 0$.
2. Démontrer que, pour tous $(a; b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n+1} k \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} = (n+1)a(a+b)^n$$

3. En déduire que, pour tout $p \in [0;1]$ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = np$$

4. Conclure quant à l'espérance de $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p)$.
5. Calculer $\mathbb{E}(X(X-1))$ en utilisant l'identité $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$
6. En déduire que $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$

Exercice $\boxed{14}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ Maximalisation de l'écart-type de la loi $\mathcal{B}(n;p)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $s(p) = \sqrt{\mathbb{V}(X_p)}$ où X_p suit la loi $\mathcal{B}(n;p)$.
Déterminer la maximum de s sur l'intervalle $[0;1]$.

Exercice $\boxed{15}$ caractéritique de la dispersion

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω telle que $X(\Omega)$ contienne $n \in \mathbb{N}^*$ éléments.

1. Etablir que $\mathbb{V}(X) \geq 0$
2. Démontrer que $\mathbb{V}(X) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{card}(\{x \in X(\Omega) \mid \mathbb{P}[X = x] \neq 0\}) = 1$
   NB : On parle alors de variable aléatoire quasi-certaine.

Exercice $\boxed{16}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ D'après ECRICOME - 2013 voie T

Une entreprise fabrique des appareils électriques en grande quantité. On admet que la livraison est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler un prélèvement de 10 de ces appareils à un tirage avec remise.
On note d la probabilité qu'un appareil donné présente un défaut et on désigne par X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 10 appareils, associe le nombre d'appareils **sans défaut** de ce prélèvement.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Préciser $X(\Omega)$ et donner l'expression de $\mathbb{P}[X = k]$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
3. Rappeler les valeurs de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$
4. *application numérique :* Dans cette question, $d = 5\%$.
   (a) Calculer la probabilité que les appareils prélevés aient tous un défaut.
   (b) Calculer la probabilité qu'au moins un des appareils prélevés présente un défaut.

vers la seconde année

Les exercices qui suivent doivent être envisagés comme des ouvertures vers le programme de seconde année.

Exercice $\boxed{17}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ D'après ECRICOME - 2016 voie T

Une urne contient six boules indiscernables au toucher : deux boules sont bleues, deux boules sont rouges, deux boules sont jaunes. On effectue une succession de tirages de deux boules successivement et sans remise dans cette urne selon le protocole suivant :

- si les deux boules sont de la même couleur, elles sont définitivement sorties de l'urne,
- si les deux boules sont de couleurs différentes, elles sont remises dans l'urne avant le tirage suivant.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages (de deux boules) nécessaires pour obtenir une première paire de boules de la même couleur.

1. Calculer la probabilité p d'obtenir une paire de boules de la même couleur lors du premier tirage (de deux boules).

2. Etablir avec soin que la variable aléatoire réelle Y vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}[Y = n] = p(1-p)^{n-1}$$

puis justifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}[Y = n] = 1$. On admettra alors que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ dans la suite.

3. On définit $f_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ sur l'intervalle $[0; 1[$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné.
Calculer $f_n'(x)$ de deux façons différentes en déduire la valeur de :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} kx^k := \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} kx^k$$

Vérifier que $\mathbb{E}(Y) = 5$

Exercice $\boxed{18}$ $\bullet\Theta^{C\sharp}$ D'après oral HEC - 2011 voie T (sans préparation)

Une urne contient 3 boules rouges, 2 boules noires et 4 boules bleues. On effectue 5 tirages successifs de 2 boules prises simultanément dans l'urne, avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages unicolores obtenus à l'issue de cette suite de 5 tirages.

1. Déterminer la loi de X en précisant $X(\Omega)$
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice $\boxed{19}$ D'après ESCP - 2015 voie T

Coralie est étudiante en classe préparatoire. Chaque matin, elle se lève en retard avec la probabilité $\frac{1}{3}$. Lorsqu'elle se lève en retard elle est obligée de prendre le bus pour se rendre au lycée. Par contre, lorsque elle est à l'heure, elle choisit avec deux chances sur cinq d'aller à pied et avec trois chances sur cinq de prendre le bus.

On considère un matin donné et on définit les événements R : « Coralie se lève en retard » et B : « Coralie prend le bus ».

1. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que $\mathbb{P}(B) = \frac{11}{15}$.
2. On remarque qu'un matin donné Coralie prend le bus. Quelle est la probabilité qu'elle se soit levée à l'heure ?
3. On étudie maintenant les trajets pendant les 180 jours de cours d'une année scolaire. On suppose que chaque jour les choix de Coralie sont indépendants des choix des jours précédents.

   On nomme X la variable aléatoire égale au nombre de fois ou Coralie prend le bus.

   (a) Reconnaître la loi de X. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X et pour chaque entier k, une expression de $\mathbb{P}(X = k)$ en fonction de k.

   (b) Donner $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

   (c) En moyenne combien de matins dans l'année Coralie peut-elle espérer aller au lycée à pied ?