.

Intégration

Exercice $\boxed{1}$ Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2-5)dx$ **2.** $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{x}{2}(1-x)dx$ **3.** $\displaystyle\int_{0}^{2}\frac{t}{\sqrt{t+1}}\,dt$ **4.** $\displaystyle\int_{0}^{2}\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\right)dt$ **5.** $\displaystyle\int_{0}^{2}3e^{4x}dx$

6. $\displaystyle\int_{0}^{2}\frac{3x}{(x^2+1)^2}dx$ **7.** $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{t^3}{t^4+2}dt$ **8.** $\displaystyle\int_{1}^{3}e^{1-2t}\,dt$ **9.** $\displaystyle\int_{1}^{2}\left(\frac{x+1}{x^2+2x}\right)dx$ **10.** $\displaystyle\int_{1}^{2}u\sqrt{u}\,du$

Exercice $\boxed{2}$ Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{2}^{3}(x+2)\,dx$ **2.** $\displaystyle\int_{-1}^{1}(2x+1)(x-5)\,dx$ **3.** $\displaystyle\int_{0}^{2}(t^3-2t)\,dt$ **4.** $\displaystyle\int_{0}^{1}4t\sqrt{t}\,dt$ **5.** $\displaystyle\int_{3}^{10}\frac{2}{\sqrt{t-1}}dx$

6. $\displaystyle\int_{0}^{2}\frac{dx}{(x+1)^2}$ **7.** $\displaystyle\int_{1}^{2}te^{t^2}dt$ **8.** $\displaystyle\int_{2}^{3}\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$ **9.** $\displaystyle\int_{1}^{2}u\ln u\,du$ **10.** $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{e^u}{e^u+1}\,du$

Exercice $\boxed{3}$ Exprimer les intégrales suivantes en fonction du paramètre $a\in\mathbb{R}$ présent :

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1}ae^{3x-2}dx$ **2.** $\displaystyle\int_{0}^{a}\frac{x}{2}e^{-x^2}dx$ **3.** $\displaystyle\int_{0}^{2}u\sqrt{u^2+a}\,du$ **4.** $\displaystyle\int_{e}^{e^a}\frac{1}{t\ln t}dt$ **5.** $\displaystyle\int_{0}^{2}t^a(1+t)\,dt$

Exercice $\boxed{4}$ Exprimer les intégrales suivantes en fonction du paramètre $n\in\mathbb{N}$ présent :

1. $\displaystyle\int_{e^{-1}}^{1}2x+\ln(x^n)\,dx$ **2.** $\displaystyle\int_{0}^{n}\frac{t}{t+1}\,dt$ **3.** $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{n}{u^{n+1}}\,du$ **4.** $\displaystyle\int_{1}^{4}\frac{e^nt-e^{-nt}}{2}\,dt$ **5.** $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\ln t}{t^{n+2}}\,dt$

Exercice $\boxed{5}$ On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases}2x & \text{si } x\leq 1\\ \frac{(x+1)^2}{2} & \text{sinon}\end{cases}$

1. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer les valeurs de $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$ ainsi que de $\displaystyle\int_{1}^{3}f(x)\,dx$
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-1}^{3}f(x)\,dx$

Exercice $\boxed{6}$ On définit une fonction g sur $\mathbb{R}$ par : $g(t)=\begin{cases}1 & \text{si } t<0\\ \frac{3}{4}e^{-\frac{1}{5}t}+\frac{1}{4} & \text{sinon}\end{cases}$

1. Etudier la continuité de g sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer les valeurs de $\displaystyle\int_{-3}^{0}g(t)\,dt$ ainsi que de $\displaystyle\int_{0}^{5}g(t)\,dt$
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-3}^{5}g(t)\,dt$

Exercice $\boxed{7}$ Démontrer l'existence et l'unicité de la primitive F s'annulant en 1 de la fonction $f:t\mapsto t^2\ln t$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice $\boxed{8}$ Démontrer l'existence et l'unicité de la primitive F s'annulant en 0 de la fonction $f : t \mapsto 2te^{-t/2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice $\boxed{9}$ Soient a et b deux réels donnés. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = (ax + b)e^{2x}$.

1. Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer, en fonction de a et b, l'expression de $F'(x)$. On notera f la fonction F' par la suite.
3. Justifier que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $(\alpha x + \beta)e^{2x}$ où α et β sont des constantes à expliciter en fonction de a et b.
4. Exprimer les constantes a et b en fonction de α et β.
5. *Applications :*
   (a) Déterminer une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (4x + 3)e^{2x}$
   (b) Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_{-2}^{3}(5 - 2x)e^{2x}\,dx$

Exercice $\boxed{10}$ Soient a, b et c trois réels donnés. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

1. Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer, en fonction de a, b et c, l'expression de $F'(x)$. On notera f la fonction F' par la suite.
3. Justifier que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^{-x}$ où α, β et γ sont des constantes à expliciter en fonction de a, b et c.
4. Exprimer les constantes a, b et c en fonction de α, β et γ.
5. *Applications :*
   (a) Déterminer une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^{-x}$
   (b) Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_{-1}^{2}(2 - 3x^2)e^{-x}\,dx$

Exercice $\boxed{11}$ Encadrer les intégrales suivantes à l'aide des valeurs minimales et maximales de la fonction intégrée :

1. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{1+x^2}dx$ **2.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{2+t^2}}$ ⚠**3.** $\displaystyle\int_{-1}^3 e^{-x^2/2}dx$ **4.** $\displaystyle\int_2^4 e^{\sqrt{t}}dt$ **5.** $\displaystyle\int_1^4 \frac{2}{1+3t^4}\,dt$

Remarque : Des encadrements bien plus fins peuvent être obtenus par la méthode des rectangles au moyen de SciLab. Voir le TP correspondant.

Exercice $\boxed{12}$ Encadrer les intégrales suivantes à l'aide des valeurs minimales et maximales de la fonction intégrée :

1. $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{3+x^2}dx$ ⚠**2.** $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ **3.** $\displaystyle\int_0^2 e^{-2x^2}dx$ **4.** $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^4 e^{\sqrt{t}}dt$ **5.** $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{3+2t^4}\,dt$

Remarque : Des encadrements bien plus fins peuvent être obtenus par la méthode des rectangles au moyen de SciLab. Voir le TP correspondant.

Exercice $\boxed{13}$ Etablir, à l'aide d'une intégrale, l'encadrement $\dfrac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$ pour $x > 1$

Exercice $\boxed{14}$ Etablir, à l'aide d'une intégrale, l'encadrement $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ pour $x > 0$

Exercice $\boxed{15}$ On définit la fonction f sur $[0; 1]$ par $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{2-x}$.

Le but de l'exercice est d'obtenir un encadrement de l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)\, dx$ que l'on ne cherchera pas à calculer directement.

1. Etablir que, pour tout $x \in [0;1]$ on a $\frac{1}{e} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$
2. On définit les intégrales J et K par :

$$J = \int_0^1 (2+x)e^{-x}\, dx \quad ; \quad K = \int_0^1 x^2 f(x)\, dx$$

   (a) Etablir que $J = 3 - 4e^{-1}$
   (b) Démontrer que $\frac{1}{3e} \leq K \leq \frac{1}{6}$
   (c) Vérifier que $J + K = 4I$
3. A partir de l'étude qui précède, déterminer un encadrement de I et vérifier que son amplitude est inférieure à $0,02$.

Exercice $\boxed{16}$ Le but de l'exercice est de calculer les valeurs des trois intégrales :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \quad ; \quad J = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+1}} \quad ; \quad K = \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\, dx$$

1. On définit la fonction f sur $[0;1]$ par $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.
   (a) Vérifier que f est définie, dérivable sur $[0;1]$ en déterminer l'expression de $f'(x)$.
   (b) En déduire la valeur exacte de I
2. Justifier que $I + J = K$
3. Etablir que $K = \sqrt{2} - J$
4. Conclure quant aux valeurs de chacune des trois intégrales.

Exercice $\boxed{17}$ **Divergence et majoration de la série harmonique**

On appelle *somme harmonique* la suite H_n définie pour $n \geq 1$ par : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et k vérifiant $1 \leq k \leq n$. Etablir que :

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$$

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$H_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq H_n$$

3. Démontrer alors que $(H_n)_{n\geq 1}$ admet $+\infty$ pour limite.
   On dit ainsi que la série harmonique diverge (ce vocable sera introduit en ECT-2)
4. Etablir que $\forall n \geq 1 \;\; H_n \leq \sqrt{n} + 1$. On pourra étudier la fonction $\varphi(x) = \sqrt{x} - \ln x$ sur $[1; +\infty[$
5. Vérifier que, à partir d'un certain rang n_0, on a $H_n \leq \sqrt{n}$.

Exercice $\boxed{18}$ On définit la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\, dx$ avec convention $x^0 = 1$ sur $[0;1]$

1. Calculez I_0 et I_1
2. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$ on a $I_n \geq I_{n+1}$
3. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

Exercice $\boxed{19}$ Le but de l'exercice est d'encadrer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x}\,dx$. On ne cherchera pas à déterminer de primitive de la fonction intégrée.

1. Etablir que, pour tout réel $x \in [0;1]$ on a $1-x \leq e^{-x} \leq 1-x+\frac{x^2}{2}$
2. Ecrire alors un encadrement de e^{-x^2} pour $x \in [0;1]$
3. En déduire que :
$$\forall x \in [0;1] \quad 1-x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1-x+\frac{x^4}{2(1+x)}$$
4. A l'aide de la division euclidienne de X^4 par $1+X$, établir enfin l'encadrement :
$$\frac{1}{2} \leq I \leq \frac{5}{24}+\frac{\ln 2}{2}$$

Exercice $\boxed{20}$ On définit une suite d'intégrales $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^n\,dx$ avec convention $I_0 = \displaystyle\int_1^e dx$.

1. Calculez I_0 et I_1
2. Pour $x \in]1;e[$ et $n \in \mathbb{N}$, vérifier que $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$
3. En déduire les variations puis le signe de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$
4. Etablir la relation de récurrence $I_{n+1} = e-(n+1)I_n$ pour $n \in \mathbb{N}$
5. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ \ (n+1)I_n \leq e$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
6. Quelle est la valeur de $nI_n + I_n + I_{n+1}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$? Calculez alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$

Exercice $\boxed{21}$ **D'après ESCP - 2012**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t}\,dt$ et :
$$\forall n \geq 1 \ \ u_n = \int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,dt$$

1. A partir de la dérivée de la fonction $t \mapsto (1+t)^{3/2}$, déterminer la valeur de u_0
2. Etablir que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement $0 \leq u_n \leq \dfrac{\sqrt{2}}{n+1}$
3. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
4. A l'aide d'une intégration par parties, établir que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \ u_{n+1} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}(n+1)\int_0^1 (t^n+t^{n+1})\sqrt{1+t}\,dt$$
5. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{4\sqrt{2}-2(n+1)u_n}{2n+5}$.
Etablir alors le rapprochement avec l'une des études de la feuille de TD 17 et comparer les deux approches.