Concours Blanc C_3

Durée : quatre heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

Problème I : Quand on enlève les oeufs à la racine

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{1+\sqrt{|x|}}$$

On notera $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonoré, d'unité graphique 2cm.

1. Démontrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et paire.
2. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
3. *Etude des variations*
   (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   (b) Etudier la dérivabilité de f en $x=0$.
   (c) Déterminer une expression de $f'(x)$ en fonction de $x>0$
   (d) Justifier que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
   (e) Dresser le tableau complet des variations de f sur $\mathbb{R}$ (pas juste $\mathbb{R}_+$)
4. La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle une tangente horizontale ? Justifier
5. *Etude de la convexité*
   (a) Etablir que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifier que l'on a :

   $$\forall x>0 \quad f''(x) = \frac{3x+4\sqrt{x}+1}{4x\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^4}$$

   (b) On pose $P(X)=3X^2+4X+1$. Etudier le signe de $P(X)$ pour $X\in\mathbb{R}_+$.
   (c) Démontrer que f est convexe sur $\mathbb{R}_+$
   (d) En déduire le convexité de f sur $\mathbb{R}$.
6. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ dans le repère proposé. On y fera figurer les droites asymptotes éventuelles. La courbe admet-elle un point d'inflexion ?

[D'après BSB 2019 voie T]

Problème Foire-deux (II)

Un forain organise un jeu de flèchettes dans une fête foraine. Le jeu se présente sous la forme de trois cibles A, B et C. La cible A est séparée en deux (2) secteurs, la cible B est séparée en quatre (4) secteurs et la cible C est séparée en huit (8) secteurs. Sur chaque cible, les secteurs sont de même dimension ce qui signifie qu'un joueur qui lance une flèchette au hasard sur une cible donnée a les mêmes chances d'atteindre chaque secteur de cette cible.

Le jeu consiste à lancer des flèchettes sur les cibles successives selon le protocole suivant :

- On commence par la cible A. Il faut atteindre le secteur 1 de cette cible pour avoir le droit de passer à la cible B ; dans le cas contraire on continue les lancers vers la cible A.
- De même, lorsqu'on lance une flèchette en direction de la cible B, il faut atteindre le secteur 1 pour avoir le droit de passer à la cible C ; dans le cas contraire, on continue les lancers vers la cible B.
- Enfin, le joueur ne lance qu'une fois la flèchette en direction de la cible C. Le secteur qu'il atteint décide du lot qu'il gagne.

On suppose que le joueur atteint toujours la cible visée et que pour une cible donnée les secteurs atteints le sont de manière équiprobable. On suppose que le joueur continue de lancer des flèchettes autant de fois qu'il est nécessaire pour avoir le droit de passer à la cible C.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note A_n l'événement :"lors du lancer de la $n$ième flèchette le joueur tire vers la cible A". On définit de même l'événement B_n (avec la cible B).

Les probabilités respectives des événements A_n et B_n seront notées a_n et b_n. Le joueur commençant par la cible A, on a donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.

1. (a) Calculer les valeurs de probabilité a_2 et b_2.
   (b) Calculer b_3 et vérifier que $b_3 = \frac{5}{8}$
2. En utilisant la formule des probabilités totales, justifier que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a :

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{2}a_n$$

3. (a) Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche les valeurs de a_n et b_n, l'entier $n \geq 1$ étant donné par l'utilisateur :

```
n = int(input("valeur de n ?"))
a=1
b=0
for i in range(..........):
        a=.........
        b=.........
print("a=",a,"b=",b)
```

   (b) Un programmeur intervertit les lignes 5 et 6 de ce programme en le tapant.
   les résultats seront-ils alors les mêmes ? Justifier.
4. Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose : $v_n = 2^{n-1}b_n + 2$
   (a) Montrer que $v_1 = 2$ et que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n$
   (b) En déduire une expression de v_n en fonction de n pour tout entier naturel $n \geq 1$.
   (c) Etablir que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a : $b_n = 2 \times \dfrac{3^{n-1}}{4^{n-1}} - \dfrac{2}{2^{n-1}}$
5. On rappelle que la commande `import numpy.random as rd` permet l'importation de la bibliothèque des commandes de génération de l'aléatoire.
   On utilisera donc la commande `rd.random()` pour simuler $U \hookrightarrow \mathcal{U}[0;1[$.
   (a) Compléter le programme suivant pour qu'il renvoie un entier (pseudo-)aléatoire entre 1 et N lorsque N est donné en entrée :

```
import numpy.random as rd
def alean(N):
        U=rd.random()
        A= ............ #A sera un entier entre 1 et N
        return(N)
```

   On remarquera que les commandes `alean(2)`, `alean(4)` et `alean(8)` permettront de simuler le lancer d'une flèchette sur, respectivement, la cible A, la cible B ou encore la cible C.

(b) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de flèchettes lancées par le joueur. Compléter le programme Python proposé en annexe afin qu'il simule notre expérience et affiche la valeur de X (on pourra utiliser la fonction `alean(n)` en la supposant correctement programmée) puis le secteur finalement touché.

6. Il faut payer 1 euro pour chaque flèchette lancée. Les joueurs se découragent vite. Le forain constate qu'en fait, chaque joueur effectue au moins deux lancers et s'il n'obtient pas le droit de tirer sur la cible C après les deux premiers lancers, alors il abandonne le jeu. Les deux euros qu'il a alors donnés sont alors perdus.
   (a) Justifier que la probabilité pour un joueur donné de gagner un lot dans ces conditions est $\dfrac{1}{8}$
   (b) Chaque lot offert par le forain est d'une valeur de 5 euros, quel que soit le secteur touché sur le cible C. On note G la variable aléatoire égale au gain du forain lorsqu'un joueur joue à ce jeu.
   Calculer $\mathbb{E}[G]$ et $\mathbb{V}[G]$
   (c) Un jour, un nombre P de joueurs se présentent au stand, avec $P \geq 2$. Ces joueurs vont tous jouer de la façon décrite ci-avant et leurs parties sont indépendantes les unes des autres. Par ailleurs, le forain doit payer des droits de 150 euros pour pouvoir disposer de son stand librement (droits d'exploitation) sur la journée.
   Combien de joueurs minimum devront se présenter pour que le forain puisse espérer rentabiliser son stand ? Justifier soigneusement

[D'après BSB 2021 voie T]

Problème III : On passe à la suite

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel $n \geq 0$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2 + nu_n}$$

1. Justifier que, pour tout entier naturel n on a $u_n \in]0; 1]$
   On admettra que ceci permet d'affirmer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie
2. Calculer les valeurs de u_1 et u_2 puis vérifier que $u_3 = \frac{1}{12}$
3. Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie la valeur de u_n à l'appel de `suite(n)` :

```
def suite(n):
        u=.......
        for k in range(.........):
                u=..................
        return u
```

4. On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Justifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   (b) Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $v_{n+1} = n + 2v_n$
   (c) En déduire que l'on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = 2^n + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-1-k}k$$
5. *Etude d'une somme particulière*
   On définit la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Déterminer les valeurs de S_1, S_2 et S_3 par calcul direct
   (b) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_{n+1} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{n+1}{2^n} + S_n$

(c) Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

On pourra admettre ce résultat pour la suite du problème

6. En utilisant le résultat de l'étude de S_n qui précède, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 2^{n+1} - (n+1)$
7. Déterminer ainsi une expression explicite de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
8. Quelles sont les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Problème IV : Probabilités à l'état $\mathbb{P}\mathcal{U}R$

Remarque préliminaire Il est recommandé, dans ce problème, de bien soigner son écriture afin de faciliter la distinction des indices. Une lecture attentive est nécessaire afin de bien saisir le rôle des lettres employées.

On considère trois urnes :

- l'urne $\mathcal{U}_1$ contient deux boules rouges et trois boules bleues.
- l'urne $\mathcal{U}_2$ contient une boule rouge unique
- l'urne $\mathcal{U}_3$ contient une boule bleue unique

On choisit d'abord une (et une seule) de ces trois urnes avec équiprobabilité. Une fois cette urne choisie, on effectue dans cette urne, et sans jamais en changer, une série de tirages d'une boule, avec remise, dans cette urne.
On désignera par U_i l'événement *l'urne choisie pour les tirages est l'urne* $\mathcal{U}_i$ (pour $i \leq 3$).

Pour tout entier naturel non nul k, on note R_k l'événement *Le* $k^{\text{ième}}$ *tirage a amené une boule rouge*

Partie A

1. (a) Justifier que les événements $U_1,\ U_2,\ U_3$ forment un système complet d'événements.
   Donner ensuite les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{U_1}(R_k)$, $\mathbb{P}_{U_2}(R_k)$ et $\mathbb{P}_{U_3}(R_k)$ en fonction de $k \in \mathbb{N}^*$
   (b) En déduire que $\mathbb{P}(R_k) = \dfrac{7}{15}$ pour tout $k > 0$ entier.
2. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Justifier que $\mathbb{P}_{U_1}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) = \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$
   (b) Préciser les valeurs de $\mathbb{P}_{U_2}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n)$ et $\mathbb{P}_{U_3}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n)$.
   En déduire, en justifiant très soigneusement, que :
   $$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) = \frac{1}{3}\left[1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n\right]$$
3. Démontrer que les événements R_1 et R_2 ne sont pas indépendants.

Partie B

1. Démontrer que, pour tout entier $k \geq 2$ on a :
   $$\mathbb{P}_{R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_{k-1}}(R_k) = \frac{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^k}{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}}$$
2. On note Z la variable aléatoire réelle égale au rang où une boule bleue apparaît pour la première fois. Par convention, on aura $[Z = 0]$ si la boule bleue n'apparait jamais.

(a) Justifier que $\mathbb{P}[Z=1]=\dfrac{8}{15}$

(b) Pour $k \geq 2$ entier, démontrer que :

$$\mathbb{P}[Z=k]=\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{k-1})\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{k-1}}(\overline{R_k})$$

(c) En déduire qu'alors on a :

$$\forall k \geq 2 \quad \mathbb{P}[Z=k]=\frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}$$

3. On définit dans cette question la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $S_0=S_1=0$ et, pour $n \geq 2$:

$$S_n=\sum_{k=2}^{n}\mathbb{P}[Z=k]$$

(a) Démontrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et positive.

(b) Expliciter S_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ (on pourra distinguer les cas $n \leq 1$ et $n \geq 2$.)

4. Compléter le programme Python proposé en annexe pour qu'il simule l'expérience décrite et renvoie la valeur de Z définie en 2°. Vous pourrez rendre l'annexe avec votre copie en y insérant votre nom.

[D'après ESC 2006 voie T]

ANNEXE : à rendre avec votre copie

NOM :

Prénom :

Problème II : question 4b)

```
import numpy.random as rd
A=1                     #assimilation de cible A à 1
B=2                     #assimilation de cible B à 2
C=3                     #assimilation de cible C à 3
cible = 1
n=1
while cible != 3:
        n=n+1
        if cible == 1:
                secteur = .....................
                if secteur == 1:
                        cible=2
        else:
                if cible == 2:
                        secteur....................
                        if secteur ...............
                                .......................
                else:
                                .......................
X=..............
print("X=",X)
print("secteur=",secteur)
```

Problème IV : partie B question 4

```
from math import*
import numpy as np
import numpy.random as rd
U = floor(3*rd.random())+1
if ................................
        Z=0
else:
        if ............................
                Z=1
        else:
                R=0
                Z=0
                while .....................
                        p=rd.random()
                        if p<= 0.4:
                                ...................
                        Z=Z+1
print(.............................)
```