

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Exercice I : Suite Récurrente

On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence au moyen de :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n \ln(u_n^2) \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On définit alors une fonction f sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x \ln(x^2) - x$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$.

Partie I : étude de f

1. Vérifier que f est définie, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$ ainsi que $f''(x)$.
2. Dresser le tableau complet de f' , la dérivée de f , sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Etablir que $f'(x)$ est positif si, et seulement si, $x \in [e^{-\frac{1}{2}}; +\infty[$.
4. En déduire les variations de f sur $]0; +\infty[$ puis établir que f admet un minimum global de $-\frac{2}{\sqrt{e}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. Vérifier que f est continue en 0
7. Quel est le nombre de solutions de $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+$?

Partie II : étude de la suite

Dans cette partie, on pourra admettre que $f(\sqrt{e}) = 0$ avec $e \approx 2,718$ est l'unique solution de $f(x) = 0$ pour $x > 0$. On rappelle que $f(0) = 0$.

1. Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie à valeurs dans $[2; +\infty[$.
2. Déterminer le sens de variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. On suppose dans cette question que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
Démontrer qu'alors, la limite l de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un réel l vérifiant $l = 2l \ln l$ et en déduire les valeurs possibles du réel l .

Indication : On pourra utiliser la continuité de f pour obtenir que $f(l) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n)$.

4. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Exercice II : petite étude exponentielle

On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^{2x} - 5e^x + 6$$

On notera $\mathcal{C}$ la courbe représentative de g dans un repère orthogonal.

1. Calculer $g(0)$.
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ainsi que $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
3. Démontrer que la courbe représentative de g admet une asymptote horizontale dont on précisera une équation.
4. Justifier que la fonction g est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$. Etudier alors le signe de $g''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
5. Etablir que la courbe $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion I d'abscisse $\ln\left(\frac{5}{4}\right)$ puis en déterminer l'ordonnée (exacte).
6. On note $p(X) = X^2 - 5X + 6$
 - (a) Déterminer les racines de p .
 - (b) Dresser le tableau des signes de p
 - (c) Donner les variations de p sur $\mathbb{R}$
7. Dresser le tableau complet des variations de g (tous les éléments figurant devront être justifiés)
8. (a) Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}_I$ à la courbe $\mathcal{C}$ en le point I d'abscisse $\ln\left(\frac{5}{4}\right)$
 (b) Esquisser l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ en repère orthogonal. Vous préciserez les choix d'unités.
 Y faire figurer l'asymptote horizontale, le point d'inflexion I et la tangente en I .

Problème III

Un professeur interroge ses étudiants en posant une liste de vingt questions. Pour chaque question, il y a trois réponses possibles et une seule est la bonne réponse.

Un étudiant $\mathcal{E}$ répond au questionnaire et on suppose pour lui que :

- Cet étudiant ne connaît que 60% de son cours et qu'ainsi, la probabilité de connaître effectivement la bonne réponse pour chaque question est de 60%.
- S'il ne connaît pas la bonne réponse, il répond au hasard.
- Les questions choisies par le professeur l'ont été de façon mutuellement indépendante.

Une question préliminaire

On considère les événements :

- R : "L'étudiant $\mathcal{E}$ connaît la réponse à la première question"
- J : "L'étudiant $\mathcal{E}$ répond correctement à la première question"

Démontrer, en utilisant la formule des probabilités totales, que $\mathbb{P}[J] = \frac{11}{15}$

Ce résultat pourra être utilisé sans justification dans la suite du devoir.

Etude stratégique du questionnaire

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réponse exacte données par l'étudiant $\mathcal{E}$ à l'issue des vingt questions.

1. Reconnaître, en justifiant, la loi de X .
 On donnera les valeurs prises par X et, de façon générale, pour chacune de ces valeurs k , la valeur de $\mathbb{P}[X = k]$
2. Calculer la probabilité d'avoir au moins une bonne réponse au QCM
3. (a) Donner les valeurs de $\mathbb{E}[X]$ et de $\mathbb{V}[X]$.
 (b) Quelle serait la note espérée par l'étudiant $\mathcal{E}$ pour un barème qui attribuerait un point par bonne réponse, zéro sinon ?
4. Afin de sanctionner les choix faits au hasard, notre professeur décide de retirer deux points en cas de mauvaise réponse, contre un point donné par bonne réponse.
 On désigne à présent par N la variable aléatoire qui renvoie la valeur finale de la note obtenue par l'étudiant $\mathcal{E}$.
 - (a) Justifier l'égalité $N = 3X - 40$
 - (b) En déduire l'espérance de N .
 - (c) RECOPIER et compléter le programme Python suivant pour qu'il simule une tentative de cet étudiant au questionnaire proposé tel que décrit par l'énoncé :

```
from math import*
import numpy.random as rd
N=0
for k in ..... :
    U = rd.random()
    if ..... :
        N=N+1
    else :
        .....
print("La note de E est",.....)
```

Un autre étudiant, $\mathcal{F}$, connaît son cours en même proportion que $\mathcal{E}$ mais il décide de ne répondre qu'aux seules questions dont il connaît la réponse. On notera Y la variable aléatoire renvoyant le nombre de bonnes réponses que cet étudiant peut obtenir à l'issue de la série de vingt questions.

5. (a) Déterminer la loi de Y et en donner l'espérance.
 - (b) En déduire la note moyenne espérée par l'étudiant $\mathcal{F}$.
 - (c) Quelle stratégie pourriez-vous recommander entre celles de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ afin d'optimiser son score moyen si ce professeur devait régulièrement proposer de telles évaluations au cours de son enseignement ?
- Une réponse argumentée à partir des résultats du problème est attendue.

[D'après ESC 2012 série T]

Problème IV

1. Justifier que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et en déduire une expression simplifiée de $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k}$ si $n \geq 1$
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \leq n$ entier on a $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}$
3. RECOPIER et compléter le script suivant de déclaration d'une fonction d'en-tête `fact` qui vérifie que l'entrée n est un entier naturel et qui calcule $n!$

```
from math import*
def fact(n):
    if n == .....:
        if .....:
            f=1
            for k in range.....
                f=f*k
            return(f)
        else :
            .....
    else :
        .....
```

4. Ecrire alors, en langage Python, un script de déclaration d'une fonction d'en-tête `binome` qui prend n et k en entrées et calcule $\binom{n}{k}$ lorsque n et k sont des entiers naturels (un message d'erreur pourra être affiché si l'entrée est incorrecte).
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on donne $P_n(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{k-1}$ pour $x \in \mathbb{R}$
 - (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
 - (b) En utilisant le symbole $\sum$, déterminer une expression de $P'_n(x)$ en fonction de n et de x

6. On pose à présent, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \neq 0$:

$$f_n(x) = \frac{(x+1)^n - 1}{x}$$

- (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
- (b) Déterminer une expression de $f'_n(x)$ en fonction de n et de x .
- (c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \neq 0$ on a :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (x+1)^k$$

- (d) En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$ on a :

$$\sum_{k=1}^n k(x+1)^{k-1} = \frac{1}{x^2} ((n+1)x(x+1)^n - (x+1)^{n+1} + 1)$$

7. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $x \neq 0$ on a :

$$\sum_{k=1}^n k(x+1)^k = (n+1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k}{k+1} x^k$$

8. Déterminer en fonction de n , entier naturel non nul la valeur de :

$$S_n = 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \cdots + n \times 2^n$$

9. Quelle est la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k(-1)^k}{k+1}$?