Lois usuelles -ECT1

Nous proposons de résumer les lois usuelles au moyen de cartes d'identité des lois

Loi Certaine

Utilisation : Intérêt théorique, rejet d'hypothèse d'aléatoire. Issue déterministe

Notation : On écrit souvent $\mathbb{1}$ pour désigner une variable aléatoire certaine égale à 1.
On pourra donc écrire $a\mathbb{1}$ pour désigner une variable aléatoire certaine égale à $a \in \mathbb{R}$.

Ensemble de valeurs On a $\mathbb{1}(\Omega) = \{1\}$ et donc $a\mathbb{1}(\Omega) = \{a\}$

Loi de probabilité : a étant un réel fixé, si X suit la même loi certaine que $a\mathbb{1}$ alors :

x	a	$\neq a$
$\mathbb{P}[X = x]$	1	0

Indicateurs : Le couple espérance-variance est donné par :

- $\mathbb{E}[\mathbb{1}] = 1$ et (par linéarité) $\mathbb{E}[a\mathbb{1}] = a$
- $\mathbb{V}[\mathbb{1}] = 0$ et $\mathbb{V}[a\mathbb{1}] = 0$

Loi Uniforme (discrète)

Utilisation : Situation d'équiprobabilité générant des nombres de 1 à n -*Généralisable aux entiers de a à b.*

Notation : On écrit $\mathcal{U}[\![1\ ;\ n]\!]$ avec n la valeur maximale générée.

Ensemble de valeurs Si X suit une loi $\mathcal{U}[\![1\ ;\ n]\!]$ alors $X(\Omega) = [\![1\ ;\ n\ ]\!]$.

Loi de probabilité : Le paramètre n étant un entier naturel non nul on a :

$$\forall k \leq n \quad \mathbb{P}[X = k] = \frac{1}{n}$$

; sous forme de tableau :

x	1	2	$\dots$	n
$\mathbb{P}[X = x]$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\dots$	$\frac{1}{n}$

Indicateurs : Le couple espérance-variance de $X \hookrightarrow \mathcal{U}[\![1\ ;\ n]\!]$ est donné par :

- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{n+1}{2}$
- $\mathbb{V}[X] = \dfrac{n^2-1}{12}$

Attendu :

Savoir étudier une loi uniforme $\mathcal{U}[\![a\ ;\ b]\!]$ avec $a < b$ entiers, par analogie avec l'étude établie pour $\mathcal{U}[\![1\ ;\ n]\!]$ ou au moyen de la transformation :

$$X = U - 1 + a$$

avec $U \hookrightarrow \mathcal{U}[\![1\ ;\ n]\!]$ en posant $n = b - a + 1$. Les valeurs a et 1 sont assimilables aux variables certaines $a\mathbb{1}$ et $a\mathbb{1}$ respectivement.

Loi de Bernoulli

Utilisation : Etude d'une expérience générique avec discrimination type *succès / échec*.
On encode en binaire la réalisation du succès :

événement	Succès	Echec
VAR	1	0

Notation : On écrit $\mathcal{B}(p)$ avec p probabilité du succès.

Ensemble de valeurs Si X suit une loi $\mathcal{B}(p)$ alors $X(\Omega) = \{0;1\}$.

Loi de probabilité : Le paramètre p étant dans $[0;1]$ on a :

x	0	$\neq 1$
$\mathbb{P}[X = x]$	$1-p$	p

Indicateurs : Le couple espérance-variance de $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ est donné par :
- $\mathbb{E}[X] = p$
- $\mathbb{V}[X] = p(1-p)$

Loi Binomiale

Utilisation : Nombre de succès d'un schéma de Bernoulli à n répétitions.
On peut aussi la voir comme somme de variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.

Notation : On écrit $\mathcal{B}(n;p)$ avec p probabilité du succès et n le nombre d'épreuves réaliées.

Ensemble de valeurs Si X suit une loi $\mathcal{B}(n;p)$ alors $X(\Omega) = [\![0\ ;\ n\,]\!]$.

Loi de probabilité : Le paramètre p étant dans $[0;1]$ et n étant un entier naturel on a :

$$\forall k \leq n \quad \mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Indicateurs : Le couple espérance-variance de $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p)$ est donné par :
- $\mathbb{E}[X] = np$
- $\mathbb{V}[X] = np(1-p)$

voir fiche -loi binomiale- pour plus de détails