.

La dichotomie

Il s'agit ici d'implémenter et d'utiliser la méthode de la dichotomie : on trouvera la dite méthode en annexe (elle est issue de la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires - hors programme en ECT-1)

1° Définir les fonctions suivantes (dans la suite, φ désignera l'une quelconque de ces fonctions) :

1. $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} + x - 2$
2. $g(x) = x^7 - 3x^4 + x^3 + 5x - 2$
3. $h(x) = 5\ln^3(x+1) - x$

2° Définir, pour chacune de ces fonctions, un `array` permettant d'observer *graphiquement ou numériquement*, un point d'annulation *et un seul* de φ, le plus proche possible de l'origine 0.
Vous relèverez alors un intervalle $I = [a; b]$ correspondant pour chacune (ou ses bornes) ainsi que l'écart $|\max(\varphi(a); \varphi(b))|$:

fonction	borne a	borne b	écart
f			
g			
h			

3° Pour chacune des fonctions de type φ, créer une procédure qui effectue les n premières itérations de la méthode de la dichotomie sur l'intervalle I correspondant (choisi). Le nombre n est alors fourni par l'utilisateur.
Cette procédure devra renvoyer un encadrement de la solution α_φ *ciblée* de l'équation $\varphi(x) = 0$ à résoudre sur I_α.

4° On change de point de vue : l'utilisateur ne fournit plus n en entrée mais ε, qualité d'approximation (de la forme 10^{-p}).
A l'aide d'une boucle `while abs(b − a) >`ε, construire une procédure qui renvoie une solution α de l'équation $f(x) = 0$ à ε près, puis l'adapter aux équations $g(x) = 0$ et $h(x) = 0$.

5° Vérifiez la procédure avec la détermination de valeurs approchées de $\sqrt{2}$, $\ln 2$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ en les identifiant comme solution d'une équation à poser.
Vous chercherez à obtenir une précision ϵ la plus fine possible et comparerez avec les appels en console des commandes de calcul direct de ces valeurs.

Annexe :Méthode de la dichotomie

Cette méthode est la plus simple à produire : elle consiste à choisir deux valeurs a et b telles que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés. On calcule ensuite l'image de $\frac{a+b}{2}$ par f et suivant qu'un changement de signe s'opère entre $f(a)$ et $f(c)$ ou entre $f(c)$ et $f(b)$, on reproduit l'opération soit sur $[a; c]$, soit sur $[c; b]$. La fonction f vérifie les conditions du corollaire (TVI & bijection)

```
from math import*
def f(x):
        y=................. #fonction à étudier
        return(y)
#méthode de dichotomie pour f(x)=0
a=........
b=........
................. #critère d'arrêt : nombre tours OU précision atteinte
        c=(a+b)/2
        if f(a)*f(c)<0 :
                b=c
        else
                a=c
# a et b contiennent des valeurs approchées de la solution
```

Approximation d'intégrale : la méthode des rectangles

Le but de ce TP est de mettre au point des méthodes de calcul numériques permettant d'obtenir des valeurs approchées d'intégrales pour lesquelles le calcul par primitive apparaît compromis.

Nous chercherons donc à développer de telles méthodes sur deux intégrales $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ et $J(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$.

On notera $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ et $g(t) = e^{-t^2}$. On rappelle aussi que, pour n un entier suffisamment grand, on a :

$$\int_a^b f(t)\, dt \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

ceci étant admis.

1. Etude pour $x = 1$:
   (a) A l'aide d'un programme ou d'une succession de commandes Python, remplissez les tableaux suivant :

x_i	0	0.1	0.2	$\dots$	0.9	1
$f(x_i)$				$\dots$		

;

x_i	0	0.1	0.2	$\dots$	0.9	1
$g(x_i)$				$\dots$		

   (b) Créer les deux tableaux A et B associés sous forme de matrices en utilisant la bibliothèque `numpy`.

   (c) Organisez le calcul de $\hat{I}(1) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{11} f(x_i)$ et $\hat{J}(1) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{11} g(x_i)$.

   Relevez alors les valeurs de $\hat{I}(1)$ et $\hat{J}(1)$ et expliquez en quoi $\hat{I}(1) \approx I(1)$ et $\hat{J}(1) \approx J(1)$

   (d) Ecrire une procédure qui prend n en entrée et qui renvoie un calcul approché de $I(1)$ au moyen d'une méthode similaire mais en découpant l'intervalle $[0; 1]$ avec un pas de $\frac{1}{n}$

   Note : à l'issue des questions précédentes, vous avez réalisé ce calcul dans le cas $n = 10$.

   (e) Comparer $\hat{I}(1)$ pour $n = 1000$ et π. Quelle conjecture faire sur la valeur exacte de $I(1)$?

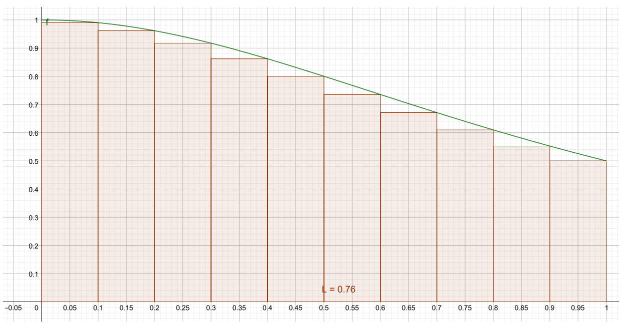
2. Généralisation du calcul
   (a) Créer une fonction TF qui prend en paramètres $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$ et renvoyant une matrices à deux lignes de valeurs associé au tableau :

x_i	0	$\frac{x}{n}$	$\frac{2x}{n}$	$\dots$	$\frac{(n-1)x}{n}$	x
$f(x_i)$				$\dots$		

   (b) Utiliser les valeurs générées par cette fonction pour calculer des valeurs approchées de $I(2)$ et $I(5)$.

   (c) Ecrire une procédure permettant de renvoyer une valeur $\hat{I}(x)$ approchée de $I(x)$ à partir de la donnée de $x \in \mathbb{R}_+$ et de $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier votre procédure avec le calcul de $\hat{I}(1)$ pour $n = 1000$ et retrouver le résultat obtenu en 1.(f)

   (d) Réaliser un calcul approché de $J(10) = \displaystyle\int_0^{10} e^{-t^2}\, dt$.


L = 0.76