.

Sommes et Séries

Sommes finies

Exercice $\boxed{1}$ **sommes : résultats numériques**

1. Déterminer, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ les valeurs des sommes suivantes :

$$\mathbf{1}.\quad A_1 = \sum_{i=0}^{8} i \quad ; \quad A_2 = \sum_{k=0}^{6} 3 \quad ; \quad A_3 = \sum_{i=3}^{6} i^2 \quad ; \quad ⚠ A_4 = \sum_{i=2}^{7} 2k$$

$$\mathbf{2}.\quad B_1 = \sum_{k=0}^{6} k \quad ; \quad B_2 = \sum_{k=0}^{7} \frac{2}{5} \quad ; \quad B_3 = \sum_{j=2}^{5} j^2 \quad ; \quad ⚠ B_4 = \sum_{k=2}^{7} 2i$$

2. Réécrire sans le symbole $\sum$ les deux expressions suivantes : $\sum_{k=2}^{10}(k-2)$ et $\sum_{i=0}^{8} i$. Qu'observe-t-on ?

Exercice $\boxed{2}$

1. Rappeler la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k$ en fonction de l'entier n.
2. Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} 5k + 6k^2$.

Exercice $\boxed{3}$

1. Proposer un script Python permettant d'organiser les calculs de $S = \sum_{i=0}^{50} 3i$ et $T = \sum_{j=0}^{15} (-2j)^2$.
2. Calculer les valeurs exactes de S et T.

Exercice $\boxed{4}$

1. Calculer les sommes $\sum_{k=0}^{16} k^2$ ainsi que $\sum_{k=0}^{20} k$ puis n déduire les valeurs de $\sum_{k=3}^{16} k^2$ et $\sum_{k=2}^{20} k$.

Exercice $\boxed{5}$

1. A l'aide d'un glissement d'indice, exprimer $S_n = \sum_{k=3}^{n} (k-2)^2$ en fonction de $n \geq 3$ entier.
2. Retrouver le résultat précédent en développant $(k-2)^2$
3. Ecrire un script Python qui prend $n \geq 3$ en entrée puis qui renvoie la valeur de S_n.

Exercice $\boxed{6}$ **[Scripts Python]** Pour chaque somme partielle proposée, écrire un script Python qui renvoie une valeur numérique approchée :

1.
$$A_1 = \sum_{i=0}^{8} i \quad ; \quad A_2 = \sum_{k=0}^{6} 3 \quad ; \quad A_3 = \sum_{i=3}^{6} i^2 \quad ; \quad ⚠ A_4 = \sum_{i=2}^{7} 2k$$

2.
$$B_1 = \sum_{k=0}^{6} k \quad ; \quad B_2 = \sum_{k=0}^{7} \frac{2}{5} \quad ; \quad B_3 = \sum_{j=2}^{5} j^2 \quad ; \quad ⚠ B_4 = \sum_{k=2}^{7} 2i$$

Exercice $\boxed{7}$ **téléscopage** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle donnée.

1. *Introduction :* Simplifier l'écriture $(a_5 - a_4) + (a_4 - a_3) + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1)$
2. On pose $u_n = a_{n+1} - a_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

   Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \leq n$ on a : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = a_{n+1} - a_p$

   Ce type de calcul s'appelle un *téléscopage*.
3. *Applications*
   (a) On pose $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.
   En déduire une expression de $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Dans cette question, on pose $a_n = 2^n$. Déterminer alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$
   (c) Déterminer, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}}$
   Indication : Utiliser la quantité conjuguée puis un télescopage

Séries

Exercice $\boxed{8}$ 1. Pour chacune des séries suivantes, déterminer la nature (de convergence) :

$$A_1 = \sum_{n\geq 1} 2^n \quad ; \quad A_2 = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad ; \quad A_3 = \sum_{n\in\mathbb{N}} 0,003 \quad ; \quad A_4 = \sum_{n\geq 7} \left(\frac{8}{7}\right)^n \quad ; \quad A_5 = \sum_{p\geq 0} \frac{1}{4^p}$$

$$B_1 = \sum_{n\geq 0} 3^n \quad ; \quad B_2 = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad ; \quad B_3 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{42} \quad ; \quad B_4 = \sum_{n\geq 100} \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad ; \quad B_5 = \sum_{p\geq 0} \frac{5}{4^p}$$

2. Pour chacune des séries convergente de la question précédente, calculer la valeur de sa somme.

Exercice $\boxed{9}$ On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$

Exercice $\boxed{10}$ On considère la suite récurrente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \sqrt{v_n + 2}$.

1. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$

Exercice $\boxed{11}$ Le but de cet exercice est de montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(n+2)(n+1)}$ converge et de déterminer sa somme.

1. On pose $N \in \mathbb{N}^*$. Etablir que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+2)(n+1)} = \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n+1}$
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}$

3. Conclure.

Exercice $\boxed{12}$ Le but de cet exercice est de montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{3}{4n^2-1}$ converge et de déterminer sa somme.

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait :
$$\frac{3}{4n^2-1} = \frac{a}{2n+1} - \frac{b}{2n-1}$$
2. En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{3}{4n^2-1}$ en fonction de $N \in \mathbb{N}^*$
3. Conclure.

Exercice $\boxed{13}$ Le but de cet exercice est de montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

On définit pour ce faire la suite $(S_N)_{N\geq 1}$ des sommes partielles définie par $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$.

1. Justifier que la suite $(S_N)_{N\geq 1}$ est croissante.
2. Etablir que $\forall n \geq 2 \quad \dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n(n-1)}$.
3. Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on a : $\dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$.
4. En déduire que la suite $(S_N)_{N\geq 1}$ converge et donc que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

   Remarque : on peut montrer que l'on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ mais c'est difficile en ECT !
5. *[supplément Python]* Utiliser la remarque pour produire un algorithme de calcul de π qui prend en entrée le nombre de chiffres après la virgule souhaité et qui renvoie l'écriture décimale de π à 10^{-n} près.

Exercice $\boxed{14}$ On cherche à étudier les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n!}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$.

On notera alors $(S_N)_{N\geq 2}$ la suite définie, pour tout N de $\mathbb{N}$ tel que $N \geq 2$, par $S_N = \displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n!}$.

1. Vérifier que la suite $(S_N)_{N\geq 2}$ est croissante.
2. Démontrer que : $\forall n \geq 2 \quad 2^{n-1} \leq n!$.
3. Soit N un élément de $\mathbb{N}$ tel que $N \geq 2$ et $k \leq N$ un entier naturel. Justifier que l'on a : $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$.
4. En déduire que la suite $(S_N)_{N\geq 2}$ est majorée.
5. Que peut-on en conclure ?
6. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ converge-t-elle ? Si oui, que peut-on dire de sa somme ?

Exercice $\boxed{15}$ Etablir la convergence puis calculer la somme de chacune des séries suivantes :

$$S_1 = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{5^n} \quad ; \quad S_2 = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \quad ; \quad S_3 = \sum_{n\geq 0} \frac{-5^{n+1}}{n!} \quad ; \quad S_4 = \sum_{n\geq 0} \frac{-1}{3^n} \quad ; \quad S_5 = \sum_{n\geq 2} n(n-1)\left(\frac{-3}{4}\right)^n$$

$$T_1 = \sum_{n\geq 0} \frac{5}{4^{n+2}} \quad ; \quad T_2 = \sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n!} \quad ; \quad T_3 = \sum_{n\geq 1} \frac{n}{4^n} \quad ; \quad T_4 = \sum_{n\geq 0} \frac{n(n-1)}{4^n} \quad ; \quad T_5 = \sum_{n\geq 2} \frac{3}{4^n}$$

Exercice $\boxed{16}$ Etablir la convergence puis calculer la somme de chacune des séries suivantes :

$$V_1 = \sum_{n\geq 0} \frac{4}{5^n n!} \quad ; \quad V_2 = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{5}\right)^{3n-1} \quad ; \quad V_3 = \sum_{n\geq 2} \frac{n}{3^{n-2}} \quad ; \quad V_4 = \sum_{n\geq 1} \frac{3n}{2^{3n-1}} \quad ; \quad V_5 = \sum_{n\geq 1} \frac{4^{n-1}}{3^{n+2}}$$

Exercice $\boxed{17}$ Etablir la convergence puis calculer la somme de chacune des séries suivantes :

$$V_6 = \sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{4^n} \quad ; \quad T_6 = \sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{7^{n+1}} \quad ; \quad S_6 = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n}$$

Exercice $\boxed{18}$ **avec des probabilités**

Au jeu des petits chevaux, pour sortir de l'écurie, on doit lancer un $D6$ à chaque tour jusqu'à obtention d'un *six*. Dans la mesure où l'on ne peut profiter pleinement de ce jeu qu'à la réalistion de cet événement, on s'intéresse au temps d'attente (en nombre de tours) espéré pour atteindre cet objectif.

1. *Préliminaires*
   On pose $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
   (a) Démontrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ est exprimer sa dérivée à l'aide du symbole Σ
   (b) Etablir que, pour $x \in]-1;1[$ on a :
   $$f_n'(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$
   (c) En déduire $f_n'\left(\frac{5}{6}\right)$
   Pour un joueur donné, on note X la variable aléatoire qui renvoie le numéro du tour (de ce joueur) de sortie de l'écurie lorsque ce joueur obtient son premier "six".
2. On lance $n \neq 0$ dés à six faces successivement. Quelle est la probabilité de n'obtenir aucun "six" ?
3. Déterminer alors de façon générale $\mathbb{P}[X = k]$ pour $k \in \mathbb{N}$ (on observera que $[X = 0]$ est un événement impossible)
4. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}[X = n]$.
5. On pose $S = \sum\limits_{k\geq 0} \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^k$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que la série S converge puis calculer la valeur de sa somme.
6. A l'aide des préliminaires, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$
7. Que proposeriez-vous pour étudier le temps d'attente espéré par ce joueur dans cette situation ?