.

Sommes et Séries

Sommes et symbole $\sum$

Dans toute la suite, les lettres n, a et b désignent des entiers naturels avec $a \leq b$ et les écritures u_k, v_k, u_i etc... renvoient à des termes de suites numériques (réelles).

• Aspect récurrent

Lorsque $n \geq a$ on a :

$$\boxed{S_n = \sum_{k=a}^{n} u_k \implies S_{n+1} = u_{n+1} + S_n}$$

• Linéarité

Se décline en deux aspects :

$$\boxed{\sum_{k=a}^{b}(u_k + v_k) = \sum_{k=a}^{b} u_k + \sum_{k=a}^{b} v_k} \qquad \boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=a}^{b} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=a}^{b} u_k}$$

- **Changement / glissement d'indices**

$$\boxed{\sum_{k=a}^{b} u_k = \sum_{k=0}^{b-a} u_{a+k}}$$

- **Regroupement/séparation de termes**
  Lorsque $n > b \geq a$, on peut écrire :

$$\boxed{\sum_{k=a}^{b} u_k + \sum_{k=b+1}^{n} u_k = \sum_{k=a}^{n} u_k}$$

  On peut aussi parler de *relation de Chasles*

- **Invariance du choix d'indice (libre)**

$$\boxed{\sum_{k=a}^{b} u_k = \sum_{i=a}^{b} u_i = \sum_{j=a}^{b} u_j = \dots}$$

Attention ! Vous ne pouvez pas employer une lettre déjà prise dans l'expression, ainsi $v_n + \sum_{n=a}^{b} u_n$ ou encore $\sum_{n=0}^{n} u_n$ sont des exemples d'écritures à proscrire.

- **Renversement / Symétrie**

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}}$$

Peut aussi être généralisé : $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} u_k = \sum_{k=a}^{b} u_{(b+a)-k}$

Séries

Nous proposons une synthèse des connaissances essentielles sur les séries (programme ECT-2). Dans tout ce qui suit, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle (numérique) et a est un entier naturel. En pratique, on aura souvent $0 \leq a \leq 2$.

Définition : La suite $\left(\sum_{k=a}^{n} u_k\right)_{n\geq a}$ est appelée *série* de terme général u_k. On la note plus facilement $\sum_{n\geq a} u_n$.
a est alors un entier naturel (le rang initial) et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique (éventuellement définie à partir de a).

Vocabulaire : Les termes $\sum_{k=a}^{n} u_k$ sont appelés *sommes partielles* de la série $\sum_{k\geq a} u_k$.

Définition : La série $\sum_{n\geq a} u_n$ converge signifie que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k\geq a} u_k$ est un réel S (non infini).
Ceci revient à dire que la suite des sommes partielles converge dans $\mathbb{R}$.

Vocabulaire : On appelle *somme d'une série* $\sum_{k\geq a} u_k$ la valeur réelle finie $S = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k\geq a}^{n} u_k$.
On note plus facilement $\sum_{k=a}^{+\infty} u_k$ la valeur de somme d'une série.

Propriété : [condition nécessaire de convergence] <u>Si</u> une série $\sum_{n\geq a} u_n$ converge <u>Alors</u> $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Remarque : La réciproque est en générale fausse.

Vocabulaire : Toute série de la forme $\sum_{n\geq a} x^n$ avec $x \in \mathbb{R}$ est appelée *série géométrique*

Propriété : Une série géométrique $\sum_{n\geq a} x^n$ converge si, et seulement si, $|x| < 1$

Propriété : [Somme des séries géométriques]

Pour $x \in]-1;1[$ on a : $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}}$