.

Matrices et Systèmes Linéaires

Exercice $\boxed{1}$ **Calculs**

Effectuer les calculs matriciels suivant :

1. $a)$ $2\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$b)$ $-3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$

$c)$ $5\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2. $a)$ $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$b)$ $3\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$c)$ $\frac{3}{4}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice $\boxed{2}$ Résoudre les équations suivantes (d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$) :

1. $a)$ $x\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 12 & 1 \end{pmatrix}$

$b)$ $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 2 & y+1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = I_2$

2. $a)$ $x\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$

$b)$ $\begin{pmatrix} 5 & x-1 \\ y-2 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = I_2$

Exercice $\boxed{3}$ **$\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ Multiplications matricielles**

On définit les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 10 & 7 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 11 & -3 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 6 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Parmi tous les couples de matrices prises dans la liste présentée ci-dessus, indiquer les produits possibles.
   On observera qu'il y a 64 couples potentiels à étudier
2. Lorsque possible, pratiquer les produits matriciels proposés : AB ; BC ; CB ; CD ; AC ; BD et AD.
3. Comparer les produits MN et NM (les résultats sont attendus)
4. Parmi les matrices X proposées, lesquelles vérifient $XQ = X$? Lesquelles vérifient $QX = X$?

Exercice $\boxed{4}$ **Systèmes à poser** Pour chacune des situations suivantes, décrire un système d'équations permettant de trouver les solutions puis le réécrire sous forme matricielle.

1. Un client commande un expresso et 3 croissants dans un café : il paye $7,30$ euros. A une autre table, dans le même café, un client paye $6,10$ euros pour un croissant et un double expresso (facturé comme deux expressos). On cherche le prix unitaire d'un expresso et d'un croissant (dans ce café)
2. Trouver les polynômes P de degré 2 pour lesquels $P(k) = k$ avec $k \in \{1; 2; 3\}$
3. On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer l'ensemble des matrices B de taille 2×2 telles que $AB = O$

Exercice $\boxed{5}$ **•$\Theta^{C\sharp}$ systèmes et matrices**

Résoudre les systèmes suivant (d'inconnues $(x;y)\in\mathbb{R}^2$)

$$(S_1):\left\{\begin{array}{lll} x & +4y & =5 \\ -3x & +y & =-1\end{array}\right. ;\ (S_2):\left\{\begin{array}{lll} x & +\frac{1}{3}y & =0 \\ 2x & +y & =\frac{2}{5}\end{array}\right. ;\ (S_3):\left\{\begin{array}{lll} \frac{3}{2}x & +4y & =\frac{5}{4} \\ 2x & -\frac{3}{4}y & =-\frac{1}{2}\end{array}\right. ;\ (S_4):\left\{\begin{array}{lll} \frac{5}{6}x & +\frac{2}{3}y & =-1 \\ \frac{4}{3}x & +\frac{1}{5}y & =0\end{array}\right.$$

Exercice $\boxed{6}$ 1. On considère 3 réels x, y et z et les matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -4 & 5 & -1 \\ -2 & 0 & 3\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix}$ et $U=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2\end{pmatrix}$.

A quel système d'équations l'égalité matricielle $AX=U$ est-elle équivalente ?

2. On considère le système (S) suivant :

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 2x & -y & +3z & = & -1 \\ -5x & +y & & = & 3 \\ x & +y & -z & = & 4\end{array}\right. .$$

A quelle égalité matricielle le système (S) est-il équivalent ?

3. On considère les matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} -7 & 5 & -1 \\ 15 & -10 & 2 \\ -9 & 6 & -1\end{pmatrix}$.
   (a) Calculer AB et BA.
   (b) Montrer que, pour toutes matrices U et V de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a l'équivalence :
   $$AU=V\Longleftrightarrow U=BV.$$
   Indication : raisonner par double implication.
   (c) Résoudre le système (T) suivant :
   $$\left\{\begin{array}{rrrcr} 2x & +y & & = & 2 \\ 3x & +2y & +z & = & 1 \\ & 3y & +5z & = & 3\end{array}\right.$$

Exercice $\boxed{7}$ 1. On considère la matrice $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Expliciter, pour $n\in\mathbb{N}^*$, M^n.

2. On considère les matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2\end{pmatrix}$.
   Expliciter, pour $n\in\mathbb{N}^*$, A^n puis B^n
3. On considère la matrice $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix}$. Expliciter, pour $n\in\mathbb{N}^*$, la matrice D^n.
4. On considère la matrice $\Delta=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Exprimer Δ^n en fonction de $n\in\mathbb{N}^*$

Exercice $\boxed{8}$ Un écureuil dressé pour un concours d'escalade est placé en base d'une structure à trois paliers notés A, B et C respectivement. Le concours est organisé en étapes et on y fait participer l'écureuil. A chaque étape, il peut soit rester sur le même palier, soit changer de palier.

Le but du concours est de faire arriver l'écureuil au palier A, le départ s'effectuant depuis le palier C.. On suppose donc que, lorsque l'écureuil est sur le sommet A, il y reste à l'étape suivante.

Par ailleurs, si cet écureuil se situe au palier B à une certaine étape, il reste sur le palier B avec probabilité $\frac{1}{2}$ et il rejoint le palier A avec probabilité $\frac{1}{2}$ à l'étape suivante. Enfin, lorsque cet écureuil est au palier C à une certaine étape, il se situera à n'importe lequel des trois paliers à l'étape suivante avec équiprobabilité.

Pour tout entier naturel n désignant un numéro d'étape, on note A_n, respectivement B_n, C_n, les événements «lors de la n-ième étape, l'écureuil est au palier A, respectivement B, C».

1. Expliciter $\mathbb{P}(A_0)$, $\mathbb{P}(B_0)$ et $\mathbb{P}(C_0)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier l'égalité $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}(B_n) + \dfrac{1}{3}\,\mathbb{P}(C_n)$. Exprimer de même $\mathbb{P}(A_{n+1})$ et $\mathbb{P}(C_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(A_n)$, $\mathbb{P}(B_n)$ et $\mathbb{P}(C_n)$.
3. En déduire une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_{n+1}) \\ \mathbb{P}(B_{n+1}) \\ \mathbb{P}(C_{n+1}) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_n) \\ \mathbb{P}(B_n) \\ \mathbb{P}(C_n) \end{pmatrix}.$$
4. A l'aide de la question précédente, déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, une relation entre $\begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_n) \\ \mathbb{P}(B_n) \\ \mathbb{P}(C_n) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et M.
5. On note P la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que la matrice $D = PMP$ est diagonale.
6. Calculer P^2, puis vérifier l'égalité $M = PDP$.
7. Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Exprimer M^n en fonction de n.
   En déduire, à l'aide de la question 3), la probabilité pour qu'après le n-ième saut, la puce soit au point A.
8. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$. Comment peut-on interpréter ce résultat ?

Exercice $\boxed{\textbf{9}}$ On considère les matrices A, J et I suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier l'égalité $J^2 = 2J$.
2. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :
$$A^n = I + \frac{1}{2}\,(3^n - 1)\,J.$$
3. (a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :
$$J^n = 2^{n-1} J.$$
   (b) Retrouver le résultat de la question 2) à l'aide de la formule du binôme de Newton.
4. En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, une expression explicite de A^n.

Exercice $\boxed{\textbf{10}}$ 1. Rappeler la formule du binôme de Newton appliquée à deux matrices A et B en précisant les conditions d'application.
On définit les trois matrices qui suivent :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Ces trois matrices sont-elles triangulaires ? Diagonales ?

3. Exprimer B^n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$
4. Justifier que A peut s'écrire sous la forme $A = D + N$ avec D diagonale, N nilpotente de sorte que $DN = ND$.
5. Déterminer, selon $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de A^n.
6. Calculer C^n par une méthode analogue à celle employée pour A (avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice $\boxed{\textbf{11}}$ On définit trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \left\{ \begin{array}{lllll} u_{n+1} & = & \frac{7}{20}u_n & +\frac{1}{10}v_n & +\frac{1}{20}w_n \\ \\ v_{n+1} & = & \frac{3}{20}u_n & +\frac{3}{10}v_n & +\frac{1}{20}w_n \\ \\ w_{n+1} & = & \frac{9}{20}u_n & +\frac{3}{10}v_n & +\frac{7}{20}w_n \end{array} \right.$$

avec $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$ et $w_0 = 0$.

On posera pour toute la suite $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer une matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $X_{n+1} = MX_n$.
2. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $X_n = M^n X_0$.
3. Soient les matrices A et B définies comme :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 1 \\ 9 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer expicitement les matrices $A + B$ ainsi que A^2 et B^2
   (b) Vérifier que $AB = BA = O_3$ (matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$)
   (c) En déduire une expression simplifée de $(A + B)^n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$
   (d) On pose $N = A + 4I_3$ où I_3 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Vérifiez que $NB = 4B$ puis justifier l'existence de deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad N^n = a_n A + b_n B$$

   (e) Ecrire explicitement N^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. A partir de l'étude précédante, justifier que $M = \dfrac{1}{20}N$ et expliciter les termes u_n, v_n et w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice $\boxed{\textbf{12}}$ Soient les matrices A et B définies comme :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 6 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer explicitement les matrices $A + B$ ainsi que A^2 et B^2
2. Les matrices A et B commutent-elles, c'est-à-dire, les produits AB et BA sont-ils égaux ?
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $(A + B)^n = A^n + B^n$.
4. On considère à présent trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n - b_n - c_n \quad ; \quad b_{n+1} = 3a_n - 2b_n - \frac{7}{2}c_n \quad ; \quad c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n$$

   On notera $\alpha = a_0$, $\beta = b_0$ et $\gamma = c_0$.
   En vous aidant des questions précédentes, déterminer une expression explicite de chacun des termes généraux a_n, b_n et c_n fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi que α, β et γ.

Calculs d'entrainements

•$\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ Procéder aux calculs suivants (on vérifiera la compatibilité au préalable) :

1. a) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 8 & 10 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 8 & 10 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

2. a) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 8 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$