.

Couples de VAR

Exercice $\boxed{1}$ Un sac contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On effectue deux tirages successifs d'une boule, avec remise.
On note X_1 le numéro de la première boule, X_2 le numéro de la deuxième boule et Y le plus grand des deux numéros obtenus.

1. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).
2. (a) Déterminer la loi du couple (X_1, Y).
   Indication : «traduire» les probabilités cherchées à l'aide de certains des événements de la famille $([X_1 = i] \cap [X_2 = j])_{1\leq i,j\leq}$
   (b) A l'aide de la formule des probabilités totales, appliquée avec le système complet associé à la variable aléatoire X_1, déterminer la loi de Y.
   (c) Peut-on obtenir la loi de X_1 de façon analogue ?
   (d) Le résultat précédent est-il surprenant ?
3. (a) Chaque couple de l'ensemble $X_1(\Omega) \times Y(\Omega)$ est-il réalisable dans le cadre de l'expérience ?
   (b) Comment l'observation qui précède se traduit-elle dans le tableau ?
4. Le but de cette question est de déterminer la loi de Y d'une autre manière.
   (a) Déterminer, pour tout k de $[\![1, 4]\!]$, $\mathbb{P}(X_1 \leq k)$ et $\mathbb{P}(X_2 \leq k)$.
   (b) En déduire, pour tout j de $[\![1, 4]\!]$, $\mathbb{P}(Y \leq j)$.
   (c) Conclure.

Exercice $\boxed{2}$ On lance un premier dé ordinaire (à six faces) et on note X la variable aléatoire associée à son résultat.
On lance ensuite un dé à X faces supposé non truqué et on note Y la variable associée à son résultat.

1. Décrire la loi du couple $(X; Y)$
2. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$
3. Déterminer les lois (marginales) de X et de Y.
4. Calculer $\mathbb{E}[XY]$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice $\boxed{3}$ Soient X et Y indépendantes de lois respectives $\mathcal{B}\left(\frac{1}{3}\right)$ et $\mathcal{B}\left(\frac{1}{4}\right)$. On définit $M = \max(X; Y)$ et $N = \min(X; Y)$.

1. Déterminer les lois des variables aléatoires M et N.
2. Déterminer la loi du couple $(M; N)$.
3. Déterminer $Cov(M; N)$. Les variables aléatoires M et N sont-elles indépendantes ?

Exercice $\boxed{4}$ On dispose de 3 boules numérotées de 1 à 3, réparties dans deux urnes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$.
On considère l'expérience $\mathcal{E}$ suivante :
— on choisit au hasard un nombre entier entre 1 et 3.
— si le nombre choisi est k (où $k \in \{1, 2, 3\}$), la boule numérotée k est changée d'urne avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$, maintenue dans l'urne qui la contient avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$.

On répète cette expérience $\mathcal{E}$. Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on désigne par X_n la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules contenues dans l'urne $\mathcal{U}$ après n réalisations de $\mathcal{E}$.
On suppose qu'au départ, toutes les boules sont dans l'urne $\mathcal{U}$.

1. Donner les lois de X_0 et X_1 et préciser $X_2(\Omega)$.
2. On introduit l'événement E : «*la boule portant le numéro choisi lors de la $2^{\text{ème}}$ expérience est dans l'urne $\mathcal{U}$*».
   (a) Justifier l'égalité :

$$\mathbb{P}_{[X_1=2]}(X_2 = 3) = \mathbb{P}_{[X_1=2]}(E) \times \mathbb{P}_{[X_1=2]\cap E}[X_2 = 3] + \mathbb{P}_{[X_1=2]}\left(\overline{E}\right) \times \mathbb{P}_{[X_1=2]\cap \overline{E}}[X_2 = 3].$$

(b) En déduire :

$$\mathbb{P}_{[X_1=2]}(X_2 = 3) = \frac{1}{9}.$$

(c) Déterminer $\mathbb{P}_{[X_1=3]}[X_2 = k]$ pour chacun des trois cas $k = 1$, $k = 2$ et $k = 3$.

(d) Déterminer de même les valeurs de $\mathbb{P}_{[X_1=2]}[X_2 = 2]$ et $\mathbb{P}_{[X_1=2]}[X_2 = 1]$.

3. Donner la loi conjointe du couple (X_1, X_2).
4. Déterminer la loi de X_2.
5. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice $\boxed{5}$ Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Une urne contient une boule blanche, une boule verte et $N - 2$ boules rouges numérotées de 1 à $N - 2$. Ces boules sont indiscernables au toucher.
On tire successivement et sans remise les N boules de l'urne.
On note X_1 la variable aléatoire égale au rang du tirage de la boule blanche et X_2 la variable aléatoire égale au rang du tirage de la boule verte.

1. Dans cette question on s'intéresse au cas particulier $N = 4$.
   (a) Préciser la composition de l'urne.
   (b) Donner la liste des 24 tirages possibles.
   (c) En déduire la loi du couple (X_1, X_2).
   (d) Déterminer les lois des variables aléatoires X_1 et X_2.
   (e) Expliquer pourquoi le résultat obtenu n'est pas surprenant.
2. On revient au cas général.
   (a) Montrer que, pour tout couple (i, j) de $[\![1, N]\!]^2$, on a :

$$\mathbb{P}\left([X_1 = i] \cap [X_2 = j]\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{N(N-1)} & \text{si} \quad i \neq j \\ 0 & \text{si} \quad i = j \end{cases}.$$

   (b) Déterminer les lois des variables aléatoires X_1 et X_2.

Exercice $\boxed{6}$ On considère deux dés équilibrés à dix faces numérotées de 1 à 10 (des $D10$ quoi...) et on note X et Y leurs résultats respectifs.

1. Identifier les lois respectives de X et Y en tant que variables aléatoires. Peut-on les considérer indépendantes ?
2. Calculer $\mathbb{P}[X \geq 7]$ puis $\mathbb{P}[Y \geq 7]$.
3. Déterminer la probabilité que la valeur prise par X soit paire.
4. Déterminer la probabilité que les valeurs prises par X et Y soient égales.
5. Déterminer la valeur de $\mathbb{P}[X \leq Y]$ puis interpréter ce résultat dans le contexte de la situation.
6. On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \text{Max}(X, Y)$.
   (a) Déterminer, pour tout k de $[\![1, 10]\!]$, la probabilité de l'événement $[X \leq k]$.
   (b) En déduire, pour tout k de $[\![1, 10]\!]$, la probabilité de l'événement $[Z \leq k]$.
   (c) En déduire la loi de Z.

Exercice $\boxed{7}$ On dispose d'un sac contenant n jetons numérotés de 1 à n, avec $n \geq 3$ entier naturel. On les suppose indiscernables au toucher. On tire simultanément deux jetons au hasard de ce sac et on note I la variable aléatoire égale au plus petit des numéros obtenus et M la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus.
On rappelle que $\binom{n}{p}$ est le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.

1. Exprimer le plus simplement possible $\binom{n}{2}$ en fonction de $n \geq 3$.

2. *Dans cette question, on étudie le cas particulier $n = 5$*
   (a) Donner la liste des $\binom{5}{2}$ tirages possibles.
   (b) En déduire la loi du couple (I, M).
   (c) Déterminer les lois des variables aléatoires I et M.
3. *On revient au cas général*
   (a) Montrer que, pour tout couple (i, j) de $[\![1, n-1]\!] \times [\![2, n]\!]$, on a :
   $$\mathbb{P}\left([I = i] \cap [M = j]\right) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \geq j \\ \dfrac{2}{n(n-1)} & \text{si} \quad i < j \end{cases}.$$
   (b) En déduire les lois marginales des variables aléatoires I et M.
   (c) Montrer que I et M ne sont pas indépendantes.

Exercice $\boxed{8}$ Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $Y = X^2$. On suppose que la loi de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

1. Justifier que la variable aléatoire X est bien définie.
2. Déterminer la loi conjointe de X et Y.
3. Déterminer la loi de Y.
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer Cov(X, Y). Que peut-on conclure ?

Exercice $\boxed{9}$ On considère une pièce truquée dont la probabilité de faire *pile* est un réel $p \in]0, 1[$ et on pose $q = 1 - p$.
On considère n parieurs, où ≥ 2 est un entier naturel, qui chacun, disposent de deux exemplaires de cette pièce. Au cours d'une mise, chaque parieur lancera successivement chacune des deux pièces. On suppose alors que tous les lancers sont indépendants les uns des autres.
On définit la variable aléatoire X égale au nombre de parieurs ayant atteint obtenu *pile* au premier lancer et la variable aléatoire Z égale au nombre de parieurs ayant atteint obtenu *pile* au moins une fois à l'issue des deux lancers.

1. Déterminer la loi de X et rappeler son espérance et sa variance.
2. Montrer que Z suit une loi binomiale et donner son espérance et sa variance.
   On pose $Y = Z - X$.
3. Que représente la variable aléatoire Y ? Déterminer la loi de Y, puis sa variance.
4. (a) Justifier que l'on a Cov$(X, Y) = -np^2q$.
   (b) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
   (c) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y.

Exercice $\boxed{\textbf{10}}$ (*D'après ESC 2010 voie T*) On dispose d'un dé cubique ordinaire ainsi que d'une pièce non truquée. On lance le dé et on observe son résultat :

- Si celui-ci est un 6, on lance deux fois la pièce.
- Sinon, on lance la pièce une seule fois.

On désignera par X la valeur obtenue sur le dé et par Y le nombre de *Pile* obtenu.

1. Décrire complètement la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Etablir que $\mathbb{P}[Y = 2] = \frac{1}{24}$
3. Déterminer $\mathbb{P}_{[X=k]}[[Y = 0]$ pour $k \leq 5$. Que vaut $\mathbb{P}_{[X=6]}[Y = 0]$?
4. Donner la loi (marginale) de Y et calculer son espérance.
5. Dresser le tableau de la loi du couple $(X; Y)$.
6. Calculer $Cov(X; Y)$.

Exercice $\boxed{\textbf{11}}$ *D'après ESCP 2013 voie T* On dispose de deux urnes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$. L'urne $\mathcal{U}_1$ contient trois boules rouges et deux boules vertes, tandis que l'urne $\mathcal{U}_2$ contient une boule rouge et quatre boules vertes.

On choisit une des deux urnes au hasard (disons à pile ou face), puis on tire dans l'urne choisie une boule que l'on remet ensuite dans la même urne. On applique ensuite la méthode suivante :

- si la boule est rouge, on effectue au second tirage d'une boule dans l'urne $\mathcal{U}_1$;
- si la boule est verte, on effectue au second tirage d'une boule dans l'urne $\mathcal{U}_2$;

On notera X_1 et X_2 les variables aléatoires de Bernoulli valant respectivement 1, si la première boule tirée est rouge (X_1), si la seconde boule tirée est rouge (X_2). On pose $Z = X_1 + X_2$.

1. Décrire complètement la loi de X_1 et donner son espérance et sa variance.
2. Vérifier que $\mathbb{P}\left([X_2 = 0] \cap [Z = 0]\right) = \frac{12}{25}$
3. Dresser le tableau de la loi du couple $(X_2; Z)$
4. Déterminer complètement la loi de X_2 et donner $\mathbb{E}[X_2]$ et $\mathbb{V}[X_2]$
5. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
6. Donner la loi de Z, calculer son espérance et montrer que $\mathbb{V}[Z] = \dfrac{414}{625}$
7. Le but de cette question est d'obtenir la variance de Z par une autre méthode.
   (a) Calculer $\mathbb{E}[X_2 Z]$
   (b) Montrer que $Cov(X_2; Z) = \frac{204}{625}$. En déduire $Cov(X_1; X_2)$.
   (c) Conclure