.

Intégration (généralisée)

Exercice $\boxed{1}$ **A partir d'une intégrale classique**

1. Calculer, pour $A \in]1,+\infty[$, $\displaystyle\int_1^A \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ puis, déterminer si l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer dans ce cas.
2. Calculer, pour $x \in]1,+\infty[$, $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y$ puis, déterminer si l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y$ converge et la calculer dans ce cas.
3. Calculer, pour $B \in]1,+\infty[$, $\displaystyle\int_1^B \frac{1}{z^3}\,\mathrm{d}z$ puis, déterminer si l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{z^3}\,\mathrm{d}z$ converge et la calculer dans ce cas.
4. Calculer, pour$A \in]2,+\infty[$, $\displaystyle\int_2^A \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ puis, déterminer si l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ converge et la calculer dans ce cas.

Exercice $\boxed{2}$ **Etude d'une famille d'intégrales**

Soit $\alpha > 0$ fixé.

1. Pour $A > 1$ réel donné, calculer $F_\alpha(A) = \displaystyle\int_1^A \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ en fonction de A.
2. Déterminer la limite lorsque A tend vers $+\infty$ de $F_\alpha(A)$.
   On pourra distinguer les cas $\alpha > 1$, $\alpha < 1$ et $\alpha = 1$.
3. Conclure quant à la convergence des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ selon les valeurs de $\alpha > 0$.

Exercice $\boxed{3}$ **Etude d'une (autre) famille d'intégrales**

1. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge-t-elle ? Si oui, la calculer.
2. On suppose ici que k est un réel strictement positif.
   Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t$ converge puis exprimer sa valeur en fonction de k.
3. On suppose ici que k est un réel strictement négatif.
   Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t$ diverge.
4. Etudier les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-kt}\mathrm{d}t$ selon la valeur du réel k.

Exercice $\boxed{4}$ On considère la fonction φ définie sur $]1;+\infty[$ par $\varphi(t) = \ln(\ln(t))$.

1. Vérifier que φ est dérivable sur $]1;+\infty[$ et calculer $\varphi'(t)$ en fonction de $t > 1$
2. On fixe $A > 1$. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$ en fonction de A
3. L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$ converge-t-elle ?
4. *Supplément :* Etudier les variations de φ sur $]1;+\infty[$ en en précisant les limites en 1 et $+\infty$.

Exercice $\boxed{5}$ Etudier la convergence de chacune des intégrales proposées puis procéder au calcul (en cas de convergence) :

1. (a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$
   (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$
   (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t.$

   Indication :
   On pourra effectuer une intégration par parties.

2. (a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t+1}{e^t}\,\mathrm{d}t.$
   (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t.$
   (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t.$

   Indication :
   On pourra effectuer une intégration par parties.

Exercice $\boxed{6}$ **éléments simples (1)**

1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout t de $[0,+\infty[$, on ait : $\frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t+2}$
2. En déduire la nature de convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t+2)}\,\mathrm{d}t$

Exercice $\boxed{7}$ **éléments simples (2)**

1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout t de $[0,+\infty[$, on ait : $\frac{t}{(t+1)(t+2)} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t+2}$
2. En déduire la nature de convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t+1)(t+2)}\,\mathrm{d}t$

Exercice $\boxed{8}$ On considère la fonction f suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (-x+1)\mathrm{e}^{-x^2+2x+1} \end{array}$$

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer.
2. (a) Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie et la calculer.
   (b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer.
3. Quelle conjecture reliant $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ peut-on émettre ?

   Vérifier la validité de cette conjecture par le calcul.

Exercice $\boxed{9}$ On considère la fonction φ définie sur $[1,+\infty[$, par $\varphi(x) = \dfrac{-6x-1}{2x^2}$.

1. Vérifier que φ est définie, continue et dérivable sur $[1,+\infty[$.
2. Pour x dans $[1,+\infty[$, calculer $\varphi'(x)$.
3. Dresser le tableau des variations de φ (on y placera les limites en 1 et en $+\infty$).
4. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{3x+1}{x^3}\,\mathrm{d}x$ converge et la calculer.

Exercice $\boxed{10}$ 1. (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge et la calculer.

(b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$ converge et la calculer.

2. Vérifier que, pour tout x de $[1, +\infty[$, on a : $\dfrac{3x+1}{x^3} = \dfrac{1}{x^3} + 3 \times \dfrac{1}{x^2}$.
3. A partir de l'observation qui précède, conjecturer la valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{3x+1}{x^3}\,\mathrm{d}x$
4. Vérifier la validité de cette conjecture par le calcul (on vérifiera aussi la convergence).

Exercice $\boxed{11}$ Etudier la convergence des intégrales suivantes et les calculer le cas échéant :

1. (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{2}{y^2}\,\mathrm{d}y$.

   (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{t+1}{t^3}\,\mathrm{d}t$.

   (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

   (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{-x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$.

2. (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{3}{y^2}\,\mathrm{d}y$.

   (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{2t-1}{t^3}\,\mathrm{d}t$.

   (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

   (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{a}{(1+a^2)^2}\,\mathrm{d}a$.

Exercice $\boxed{12}$ **Etude d'une intégrale généralisée en deux bornes**

1. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est impaire.
2. (a) Pour $A > 0$ donné, comparer les valeurs de $\displaystyle\int_{-A}^{0} x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{0}^{A} x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$

   (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ converge et la calculer.

   (b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ converge et la calculer.

   (c) Expliciter $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$

3. Calculer enfin la valeur de $\displaystyle\int_{-2}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ après en avoir justifié la convergence.

Exercice $\boxed{13}$ Dans cet exercice, on admet que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ converge et est égale à 1.

1. Justifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est paire.
2. Etablir que chacun des deux intégrales $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ ainsi que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ convergent.

   (a) Démontrer que, pour tout $A > 0$, on a $\displaystyle\int_{-A}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{A} f(t)\,\mathrm{d}t$

   (b) En déduire que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Déterminer enfin les valeurs de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$.

4. *Supplément :* Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ en précisant les limites en $\pm\infty$.

Exercice $\boxed{\textbf{14}}$ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

1. Etudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 0$
2. (a) Que peut-on dire de la parité de g ?
   (b) Démontrer que, pour tout $A > 0$, on a $\displaystyle\int_{-A}^{0} g(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^A g(t)\,\mathrm{d}t$
   (c) Etablir que, pour tout $A > 0$, on a $\displaystyle\int_{-A}^{A} g(t)\,\mathrm{d}t = 0$
3. **paradoxe !** A-t-on l'égalité $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 0$?

Exercice $\boxed{\textbf{15}}$ **l'intégrale dite de Gauss**

Le but de cet exercice est de montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

1. On introduit les fonctions F et G suivantes :

$$F : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \qquad G : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \end{array}.$$

   (a) Quelle est la dérivée de G ? En déduire que G est croissante.
   (b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer.
   (c) Construire le tableau de variation de G et en déduire que G est majorée sur $[1,+\infty[$.
   (d) Montrer que, pour tout t de $[1,+\infty[$, on a :
$$\mathrm{e}^{-t^2} \leq \mathrm{e}^{-t}.$$
   (e) En déduire que la fonction F est majorée sur $[1,+\infty[$.
   (f) Justifier que F est croissante.
   (g) Justifier que F admet une limite finie en $+\infty$. Que peut-on en déduire ?
2. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
3. Conclure.
4. *Pour les probabilités :* Déduire de cette étude la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$.
   Remarque : On démontre ainsi un résultat admis dans un exercice précédant, mais nous n'avons pas prouvé encore cette intégrale vaut 1

Exercice $\boxed{\textbf{16}}$ Le but de cet exercice est de montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

1. (a) Calculer, pour tout x de $[1,+\infty[$, $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
   (b) En déduire que, pour tout x de $[1,+\infty[$, on a : $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \leq 1$.
2. (a) Comparer, pour tout x de $[1,+\infty[$, $\dfrac{1}{x^2}$ et $\dfrac{1}{1+x^2}$.
   (b) En déduire que, pour tout x de $[1,+\infty[$, on a : $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leq 1$.
   (c) Que peut-on en déduire ?
3. Conclure.

Exercice $\boxed{\textbf{17}}$ Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Le but de cet exercice est d'établir que, pour tout n de $\mathbb{N}$, I_n est bien définie et d'en donner une expression explicite.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Le but de cette première question est de justifier l'existence d'un réel A supérieur ou égal à 1 tel que :
$$\forall t \geq A\,,\ t^n \mathrm{e}^{-t} \leq \frac{1}{t^2}.$$
   (a) Déterminer, en justifiant, la valeur de $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{n+2}\mathrm{e}^{-t}$
   (b) En déduire l'existence de $A > 1$ pour lequel l'encadrement $0 < t^{n+2}\mathrm{e}^{-t} \leq 1$ est vérifié pour tout $t \leq A$.
   (c) Montrer alors que la condition recherchée dans cette question est vérifiée.
2. Soit n un élément de $\mathbb{N}$ et $A > 1$ tel que, pout tout $t \in [A,+\infty[$, $t^n\mathrm{e}^{-t} \leq \dfrac{1}{t^2}$ (*cf* question 1)).
   (a) Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge en la calculant.
   (b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge puis que I_n est bien défini.
3. Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Déterminer, à l'aide d'une intégration par parties, une relation entre I_{n+1} et I_n.
4. Calculer I_0. En déduire I_1, I_2 et I_3.
5. Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, une expression explicite de I_n. *Indication : on pourra vérifier par récurrence*

Exercice $\boxed{\textbf{18}}$ **d'après ECRICOME 2016**

On pose $I_0 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ et, pour tout entier naturel non nul n, $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que I_0 est une intégrale convergente, égale à $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout réel $M > 1$:
$$\int_1^M x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{M^{n+1}}{\mathrm{e}^M} + \frac{1}{\mathrm{e}} + \int_1^M (n+1)x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$
3. A l'aide d'un raisonemment par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n, l'intégrale I_n converge.
4. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+1} = \frac{1}{\mathrm{e}} + (n+1)I_n$
5. Calculer I_n pour $n \in \{1,2,3\}$. On admet que $I_4 = \frac{65}{\mathrm{e}}$, $I_5 = \frac{326}{\mathrm{e}}$.
6. Ecrire un script en langage Python qui, demandant à l'utilisateur un entier strictement positif `n`, calcule et affiche I_n.

Exercice $\boxed{19}$ Un cas limites

1. On considère la fonction f suivante :

$$f: \begin{array}{ccc} [0,2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-2x} - \dfrac{x^2-5x+6}{x-2} \end{array}$$

Le but de cette question est d'étudier et de comparer deux définitions de $\displaystyle\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.

(a) Expliquer en quoi f ne peut pas être définie en le réel 2. On vérifiera que f est bien définie sur $[0;2[$.

(b) Soit $a \in]0,2[$. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie et la calculer.

(c) On pose $I_1 = \displaystyle\lim_{a\to 2}\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$. Déterminer I_1.

2. On considère la fonction g suivante :

$$g: \begin{array}{ccc} [0,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \mathrm{e}^{-2x} - \frac{x^2-5x+6}{x-2} & \text{si} \quad x \in [0,2[\\ 1+e^{-4} & \text{si} \quad x = 2 \end{cases} \end{array}$$

(a) Vérifier que g est continue sur $[0;2]$.

(b) Comparer les valeurs, pour $a \in [0;2[$, des intégrales $\displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^a g(t)\,\mathrm{d}t$.

(c) Etablir que, pour tout $x \in [0;2]$, on a $g(x) = e^{-2x} - x + 3$

(d) On pose $I_2 = \displaystyle\int_0^2 g(t)\,\mathrm{d}t$. Déterminer I_2.

3. Que peut-on dire de I_1 et I_2 ? Interpréter graphiquement.

Exercice $\boxed{20}$ un autre cas limite

On considère la fonction f suivante :

$$f: \begin{array}{ccc} [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1-x} \end{array}.$$

1. Dresser, en justifiant, le tableau des variations de f sur $[0;1[$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction du réel $0 < a < 1$
3. Que vaut $\displaystyle\lim_{a\to 1}\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$?

Exercice $\boxed{21}$ fonctions continues par morceaux

1. On considère les fonctions g et ϕ définies sur $[1;6]$ respectivement par :

$$g: x \mapsto \begin{cases} 1+\frac{1}{3}x & \text{si} \quad x \in [1,4[\\ \frac{4}{x}+1 & \text{si} \quad x \in [4,6] \end{cases} \qquad \phi: x \longmapsto \begin{cases} 1+\frac{1}{3}x & \text{si} \quad x \in [1,4] \\ \frac{4}{x}+1 & \text{si} \quad x \in]4,6] \end{cases}$$

(a) Etudier la continuité de g et de ϕ sur $[1;6]$

(b) En utilisant la relation de Chasles, proposer un calcul de $\displaystyle\int_1^6 g(t)\mathrm{d}t$

(c) En utilisant la relation de Chasles, proposer un calcul de $\displaystyle\int_1^6 \phi(t)\mathrm{d}t$

(d) Comparer les résultats obtenus

2. On considère la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par :

$$f: \quad x \quad \mapsto \quad \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x\in[1,2] \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad x\in]2,4[\\ 2\ln(x) & \text{si} \quad x\in[4,7[\\ 2 & \text{si} \quad x\in[7,+\infty[\end{cases}.$$

Etudier sa continuité puis calculer $\displaystyle\int_1^{10} f(t)\mathrm{d}t$

3. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h: \quad x \quad \longmapsto \quad \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si} \quad x\in]-\infty,-1] \\ 2 & \text{si} \quad x\in]-1,1[\\ \frac{1}{x^2} & \text{si} \quad x\in]1,+\infty[\end{cases}.$$

(a) Etudier la continuité de h sur $\mathbb{R}$

(b) Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{2} h(t)\mathrm{d}t$ à l'aide de la relation de Chasles

(c) Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} h(t)\mathrm{d}t$ ainsi que $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} h(t)\mathrm{d}t$ convergent.

(d) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\mathrm{d}t$

4. **Synthèse :** Comment proposeriez-vous de calculer l'intégrale convergente d'une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ sauf en exactement n points réels $a_1\ ;\ \dots\ ;\ a_n$?

Exercice $\boxed{22}$ Cas d'une fonction causale (1)

Soit f la fonction suivante :

$$f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 3\mathrm{e}^{-2x} & \text{si} \quad x\geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}.$$

1. Calculer les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{5} f(t)\,\mathrm{d}t$ et vérifier leur convergence.
2. Plus généralement, vérifier que, pour tout réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer.
3. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer.
4. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer.

Exercice $\boxed{23}$ Cas d'une fonction causale (2) Soit Π la fonction (dite *Porte* suivante :

$$\Pi: \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{8} & \text{si} \quad x\in[2,10] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}.$$

1. Démontrer que Π est discontinue en exactement deux points que l'on déterminera.
2. Représenter Π graphiquement.

3. En distinguant les cas pour le réel a, calculer les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} \Pi(t)\,\mathrm{d}t$.
4. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer.

Exercice $\boxed{24}$ **Avec paramètre (1)**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On considère la fonction f_n suivante :

$$f_n : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 2t(1-t)^n & \text{si} \quad t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge
2. Vérifier par le calcul que $t(1-t)^n = (1-t)^n - (1-t)^{n+1}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{0}^{x} f_n(t)\mathrm{d}t$ en fonction de n et du réel x de $[0;1]$
4. Que vaut, en fonction du réel $x \in \mathbb{R}$ l'expression $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t$?
5. Calculer enfin $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$. *La justification de la convergence est attendue*

Exercice $\boxed{25}$ **Avec paramètre (2)**

Soit a un réel. On considère la fonction f suivante :

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2(t-a)} & \text{si} \quad t \geq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}.$$

1. Calculer, pour $x > 0$, la valeur de $\displaystyle\int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.
2. Montrer que, pour tout réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer.
3. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de $x > 0$.
4. Etablir la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et en donner la valeur en fonction de a.

Exercice $\boxed{26}$ On considère les fonctions f et g, définies sur $]0;1]$ respectivement par : $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

1. Rappeler les limites respectives de f et g en 0^+.
2. Esquisser les courbes représentatives de f et g dans un même repère
3. Soit $A \in]0;1[$ donné. Calculer, en fonction de A, les valeurs des intégrales $I(A)$ et $J(A)$ définies par :
$$I(A) = \int_{A}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \quad ; \quad J(A) = \int_{A}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t$$
4. Déterminer $\displaystyle\lim_{A \to 0^+} I(A)$ ainsi que $\displaystyle\lim_{A \to 0^+} J(A)$. Qu'observe-t-on ?
5. En termes de convergence, comment désigneriez-vous les intégrales $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$?
Aucune connaissance n'est exigible sur le vocabulaire ou les résultats de telles intégrales en ECT