.

VAR discrètes infinies

Introduction aux espaces de probabilités infinis

Exercice $\boxed{1}$ On considère une infinité d'urnes (c'est très pratique...) désignées par $\mathcal{U}_n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On sélectionne au hasard l'une (et seulement l'une) d'entre elles de sorte que la probabilité de choisir l'urne $\mathcal{U}_n$ soit égale à 2^{-n}.
De plus, pour $k \in \mathbb{N}^*$ l'urne $\mathcal{U}_k$ possède 2^k boules indiscernables au toucher, dont exactement une est blanche.

1. Vérifier que la famille d'événements U_n : "*On sélectionne l'urne* $\mathcal{U}_n$ forme un système complet d'événements et qu'en particulier, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(U_n)$ converge et que sa somme vaut 1.
2. Après avoir sélectionné une urne au hasard comme décrit, on tire exactement une boule de cette urne :
   (a) Sachant que l'urne sélectionnée porte le numéro k (non nul), quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?
   (b) A priori, en réalisant l'expérience entier, quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?
3. On a obtenu une boule blanche à l'issue de cette expérience.
   Quelle est la probabilité que l'on ait sélectionné l'urne numéro 1 (un) ?

Exercice $\boxed{2}$ Un enfant jette un galet (plat) pour faire des ricochets sur la surface d'un lac.
On suppose que le galet effectue un n^{ieme} ricochet avec probabilité $\frac{1}{n}$ si l'on sait que ce galet a déjà effectué $n-1$ ricochets au préalable (avec $n \in \mathbb{N}^*$.)

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, quelle est la probabilité notée p_n que le galet coule après avoir effectué exactement n ricochets ?
2. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} p_k$ puis interpréter dans le contexte.

Exercice $\boxed{3}$ Au sein d'un réseau informatique, on procède à des transferts successifs d'un message d'un ordinateur à l'autre.
On suppose que chaque transmission a une probabilité $p \in]0;1[$ de se faire avec une erreur dans le message d'arrivée et que les transmissions sont indépendantes les unes des autres.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité notée p_n que le message parvienne sans erreur au n^{ieme} ordinateur successif.
2. Calculer $\lim_{n\to+\infty} p_n$ puis interpréter dans le contexte.

Avec les VAR discrètes

Exercice $\boxed{4}$ On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce truquée pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est p ($p \in]0,1[$).
On note X la variable aléatoire égale au rang d'obtention du premier pile et, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on désigne par F_k l'événement :"*on obtient face au* k*-ème lancer*" et on pourra écrire P_k pour désigner $\overline{F_k}$.

1. (a) Déterminer $\mathbb{P}[X = 1]$, $\mathbb{P}[X = 2]$ et $\mathbb{P}[X = 3]$.
   (b) Plus généralement, déterminer, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}[X = k]$.
2. Le but de cette question est de déterminer la probabilité de l'événement F : "*on obtient face à tous les lancers*".
   (a) Soit m un élément de $\mathbb{N}^*$. On considère l'événement $B_m = \bigcap_{k=1}^{n} F_k$.
      i. Détermier $\mathbb{P}(B_m)$ puis interpréter ce résultat dans le contexte.
      ii. Exprimer B_m à l'aide d'un événement du type $[X \in I]$ le plus simplement possible.

(b) Déduire des résultats qui précèdent que, pour tout m de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$0 \leq \mathbb{P}(F) \leq (1-p)^m.$$

(c) Déterminer $\lim\limits_{m \to +\infty} (1-p)^m$.

(d) En déduire la valeur de $\mathbb{P}(F)$. Que pourrait-on dire de l'événement F ?

3. Caractériser la loi de X (on pourra s'aider d'un tableau)

Exercice $\boxed{\mathbf{5}}$ Soit p un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$ et X une variable aléatoire qui suit la loi géométrique à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ de paramètre p (*ie* $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$). On pose $q = 1 - p$.

1. Déterminer la probabilité que X prenne une valeur strictement inférieure à 3.
2. Déterminer la valeur de $\mathbb{P}[2 \leq X \leq 5]$.
3. Déterminer la probabilité que X prenne une valeur strictement supérieure à 5.
4. Déterminer la probabilité que la valeur prise par X soit impaire.
   Indication : On pourra remarquer que $\{2k+1\ ;\ k \in \mathbb{N}\}$ décrit l'ensemble des entiers naturels impairs.
5. Peut-on trouver une valeur de p permettant d'avoir la probabilité que X soit paire égale la probabilité que X soit impaire ? Justifier.

Exercice $\boxed{\mathbf{6}}$ Soit $p \in]0;1[$. On suppose que la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad F(n) = 1 - (1-p)^n$$

Donner la loi de X.

Exercice $\boxed{\mathbf{7}}$ On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée : à chaque lancer la probabilité d'obtenir pile est égale à $\dfrac{2}{3}$ (et donc la probabilité d'obtenir face est égale à $\dfrac{1}{3}$).

Les lancers sont supposés indépendants. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour l'obtention, pour la première fois, de deux piles consécutifs.

On définit pour $k \in \mathbb{N}^*$ les événements :
- F_k : "*on obtient face au k-ème lancer*"
- P_k : "*on obtient pile au k-ème lancer*".

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note p_k la probabilité de l'événement $[X = k]$

1. Exprimer les événements $[X = 1]$, $[X = 2]$, $[X = 3]$, $[X = 4]$ et $[X = 5]$ à l'aide d'événements des familles $(P_n)_{n\geq 1}$ et $(F_n)_{n\geq 1}$.
   En déduire chacune des valeurs p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5.
2. Montrer que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:
$$p_{n+2} = \frac{2}{9}p_n + \frac{1}{3}p_{n+1}.$$
   Indication : utiliser la formule des probabilités totales en distinguant deux cas selon le résultat du premier lancer.
3. On pose $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ p_n \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $MU_n = U_{n+1}$
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $U_n = M^{n-1}U_1$
   (c) On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible, calculer P^{-1} puis vérifier que $M = P\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}P^{-1}$
   (d) En déduire une expression de M^n en fonction de l'entier naturel non nul n.
   On pourra vérifier par récurrence que $M^n = PD^nP^{-1}$ avec D matrice diagonale bien choisie.

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $p_n = \dfrac{4}{9}\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$
5. Montrer que X admet une espérance et la déterminer.

Exercice $\boxed{\textbf{8}}$ **les petits chevaux** Au jeu des petits chevaux, on lance un dé à six faces ordinaire, supposé non truqué, à chaque tour. L'obtention d'un 6 permettant de faire sortir son premier cheval de l'écurie et, pour ainsi dire, de débuter le jeu à proprement parler.

On note T le nombre total de dés lancés (et aussi de tours écoulés) au moment de la sortie du premier cheval.

1. Reconnaitre la loi de T, en justifiant soigneusement.
2. Déterminer les valeurs $\mathbb{E}[T]$ et $\mathbb{V}[T]$.
3. Quelle est la probabilité que le nombre de tours écoulés au moment de la sortie du premier cheval excède $\mathbb{E}[T]$?
4. Généraliser les résultats qui précèdent en utilisant un dé à $N \geq 2$ faces équilibré et en supposant que le score à effectuer pour sortir de l'écurie soit N.

Exercice $\boxed{\textbf{9}}$ *Polynôme à racines aléatoires*

On se donne une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Déterminer la probabilité que $P(t) = t^2 - 2Xt + X$ ademtte des racines réelles distinctes.
2. On note S l'abscisse du sommet de la parabole représentant la fonction P. Quelle est la valeur de $\mathbb{E}[S]$?
3. Peut-on choisir $\lambda > 0$ pour que la probabilité que cette même parabole passe par le point de coordonnées $(X;X)$ excède 50% ?

Exercice $\boxed{\textbf{10}}$ Un client vient tous les jours dans une boulangerie pour acheter, au hasard selon la boulangère, une ou deux baguette (de pain) équiprobablement. On considère que les achats de chaque jour de ce client sont indépendants les uns des autres et Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note S_n la variable aléatoire égale au nombre total de baguette achetées par ce clients après n jours d'observations.

1. Déterminer la loi de probabilité de S_1 et calculer $\mathbb{E}(S_1)$ et $\mathbb{V}(S_1)$.
2. Déterminer la loi de probabilité de S_2 et calculer $\mathbb{E}(S_2)$ et $\mathbb{V}(S_2)$.
3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on appelle U_n la variable aléatoire égale au nombre de fois où ce client a acheté exactement une baguette au cours des n premiers jours d'observations.

   Déterminer la loi de U_n, puis $\mathbb{E}(U_n)$ et $\mathbb{V}(U_n)$.
4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on appelle D_n la variable aléatoire égale au nombre de fois où ce client a acheté exactement deux baguettes au cours des n premiers jours d'observations.
   (a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Déterminer une expression de S_n en fonction de U_n et D_n puis une expression de S_n en fonction de U_n (et n).
   (b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.
   (c) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la loi de S_n.
5. A $1,05$ euros la baguette, combien la boulangère peut-elle espérer obtenir comme chiffre d'affaire durant le mois de janvier 2025 au seul moyen de ce client ?

   Cette boulangerie ouvre tous les jours, même le jour de l'an !

Exercice $\boxed{\textbf{11}}$ Un commerçant estime que le nombre d'exemplaires d'un certain produit saisonnier qu'il vend pendant l'été est une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}\,,\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{p^k}{(1+p)^{k+1}}$$

où $p > 0$ est le prix de la dernière campagne publicitaire.

1. Vérifier que l'on définit bien ainsi une loi de probabilité.

2. (a) Montrer que la suite $(\mathbb{P}(X=k))_{k\geq 0}$ est décroissante.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbb{P}(X=k)$.
   (c) Les résultats précédents vous paraissent-ils mettre en défaut la modélisation du nombre de produits vendus du commerçant ?
3. On introduit la variable aléatoire Z définie par $Z = X+1$.
   (a) Vérifier que Z suit une loi géométrique à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont on déterminera le paramètre.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de X.
4. On suppose que le commerçant dispose de s ($s \in \mathbb{N}^*$) exemplaires de ce certain produit avant l'été. Déterminer la probabilité de rupture de stock.

Exercice $\boxed{12}$ On désigne par a un réel strictement positif et on considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, qui vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ \mathbb{P}(X=n+1) = \frac{a}{n}\mathbb{P}(X=n).$$

1. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = (n-1)!\,\mathbb{P}(X=n)$.
   (a) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_{n+1} en fonction de u_n.
   (b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une expression de u_n en fonction de a, n et $\mathbb{P}(X=1)$.
2. (a) Que peut-on dire de la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 1} P(X=n)$? En déduire $\mathbb{P}(X=1)$.
   (b) Expliciter la loi de X.
3. On introduit la variable aléatoire Y définie par $Y = X-1$.
   (a) Reconnaître la loi de Y et en déduire l'espérance et la variance de Y.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice $\boxed{13}$ Soit p un élément de l'intervalle $]0,1[$ et $\lambda > 0$ un réel.
Pour chacun des série suivantes, justifier de sa convergence puis calculer sa somme :

1. (a) La série $S_p = \sum\limits_{n\geq 1} np(1-p)^{n-1}$
   (b) La série $T_p = \sum\limits_{n\geq 1} n(1-p)^n$
   (c) La série $Z_p = \sum\limits_{n\geq 1} n^2(1-p)^n$
2. (a) La série $U_\lambda = \sum\limits_{n\geq 0} 2\lambda^n \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{n!}$
   (b) La série $V_\lambda = \sum\limits_{n\geq 0} \lambda^n \dfrac{\mathrm{e}^{-2\lambda}}{n!}$
   (c) La série $W_\lambda = \sum\limits_{n\geq 1} (2\lambda)^n \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{(n-1)!}$

Exercice $\boxed{14}$ **Avec des couples**
Une variable aléatoire N définie sur un espace probabilisé suit une loi de Poisson de paramètre 5.
X désigne une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé. On suppose enfin que N et X sont à valeurs entières positives et que pour tout $(n;k) \in \mathbb{N}^2$, si $k \leq n$ alors :

$$\mathbb{P}_{[N=n]}[X=k] = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}$$

1. Vérifier que $\mathbb{P}_{[N=n]}[X>n] = 0$
2. Reconnaître la loi conditionnelle de X sachant $[N=n]$ réalisé.
3. Démontrer que la loi marginale de X est $\mathcal{P}(1)$
4. Déterminer les valeurs d'espérance respectives de X et N.
5. Calculer la valeur de $\mathbb{P}_{[X=k]}[N=n]$ pour $k \leq n$ entiers naturels.