Lycée Eiffel(?) — **Corrigé I_1** — ECT-2 2024/2025

Interrogation I_1 (A)

Exercice I

```
def ExoI (k):
    S=0
    for i in range (2, k+1):
        S = S + k*i**2 - 1/i
    return (S)
```

Exercice II

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}k + \frac{k^2}{5} \right)$

par linéarité de Σ il vient :

$$S_n = \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{5} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{5} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{(formules de cours)}$$

$$= \frac{n(n+1)}{3} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{30} = \frac{n(n+1)}{3}\left[1 + \frac{2n+1}{10}\right] = \frac{n(n+1)(2n+1}{30}$$

Exercice III

Observons déjà que, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{2^{n-1}}{3^{2n+1}} = \left(\frac{2}{9}\right)^n \times \frac{2^{-1}}{3}$

Etudions $\sum_{n \geq 2} \frac{2^{n-1}}{3^{2n+1}} = \frac{1}{6} \sum_{n \geq 2} \left(\frac{2}{9}\right)^n$

Or $\sum_{n \geq 2} \left(\frac{2}{9}\right)^n$ est une série géométrique avec $\left|\frac{2}{9}\right| < 1$

donc convergente et ainsi :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{2n+1}} = \frac{1}{6} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^n = \frac{1}{6}\left[\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^n - 1 - \frac{2}{9}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{1-2/9} - 1 - \frac{2}{9}\right] = \frac{1}{6}\left(\frac{9}{7} - \frac{11}{9}\right)$$

qui, finalement, fournit $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{2n+1}} = \frac{1}{6} \times \frac{4}{63} = \frac{2}{189}$

...rcice IV

...tialisation : Si $n=0$ on a $\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0$ d'une part

$\left(\frac{0(0+1)}{2}\right)^2 = 0$ d'autre part soit $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

...s ce cas

...rédité : Supposons que, pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$ donné,

...it $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

...lons alors : $\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = (n+1)^3 + \sum_{k=0}^{n} k^3$ (aspect récurrent)

$$= (n+1)^3 + \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad \text{(par hypothèse de récurrence)}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = (n+1)^2 \left[n+1 + \frac{n^2}{4}\right] = \frac{(n+1)^2}{4}(4n+4+n^2)$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \quad \text{(id Rmq : } (n+2)^2 = n^2 + 4n + 4 \text{)}$$

...enu $\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$ ce qui atteste de l'hérédité

...clusion : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Interrogation I_1 (B)

Exercice I

```
def ExoI(k):
    S=0
    for j in range(k+2):
        S= S+ k**2*j+2/j
    return(j)
```

Exercice II

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on calcule donc :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{4} i^2 - i\right) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i$$

par linéarité de Σ

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{4} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{2n+1}{12} - 1\right] = \frac{n(n+1)}{24}(2n-11)$$

Exercice III

On commence par calculer $\frac{4^{n-2}}{5^{2n-1}} = \frac{4^n}{25^n} \times \frac{4^{-2}}{5^{-1}} = \frac{5}{16}\left(\frac{4}{25}\right)^n$

pour $n \in \mathbb{N}$ et ainsi $S = \sum_{n \geq 1} \frac{5}{16}\left(\frac{4}{25}\right)^n$

or $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{4}{25}\right)^n$ converge comme série géométrique

avec $\left|\frac{4}{25}\right| < 1$ et ainsi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^{n-2}}{5^{2n-1}} = \frac{5}{16}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{25}\right)^n$

et on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^{n-2}}{5^{2n-1}} = \frac{5}{16}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{25}\right)^n - 1\right) = \frac{5}{16} \times \left(\frac{1}{1-4/25} - 1\right)$

$$= \frac{5}{16}\left(\frac{25}{21} - 1\right) = \frac{5}{16} \times \frac{4}{21} = \frac{5}{84}$$

Exercice IV

Demontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\sum_{k=0}^{n} k2^{-k} = S_n$ où l'on pose $S_n = 2\left(1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}\right)$

Initialisation : Pour $n=0$ on a $\sum_{k=0}^{0} k2^{k} = 0 \times 2^0 = 0$ et, par ailleurs, $S_0 = 2\left(1 - \frac{0+2}{2^{0+1}}\right) = 2 \times \left(1 - \frac{2}{2}\right)$

$= 2(1-1) = 0$

Donc $\sum_{k=0}^{n} k2^{-k} = S_0$ avec $n=0$

Hérédité : Supposons que, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque, on ait $\sum_{k=0}^{n} k2^{-k} = S_n$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k2^{-k} = (n+1)2^{-(n+1)} + \sum_{k=0}^{n} k2^{-k} \quad \text{(aspect récurrent)}$$

$$= (n+1)2^{-(n+1)} + S_n \quad \text{(hypothèse de récurrence)}$$

$$= (n+1)2^{-(n+1)} + 2\left(1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}\right) \quad \text{(définition de } S_n\text{)}$$

$$= 2\left[(n+1)2^{-n-2} + 1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}\right] = 2\left(1 - \frac{n+2}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+2}}\right)$$

$$= 2\left(1 - \frac{2(n+2)}{2^{n+2}} + \frac{n+1}{2^{n+2}}\right) = 2\left(1 - \frac{2n+4-n-1}{2^{n+2}}\right)$$

$$= 2\left(1 - \frac{n+3}{2^{n+2}}\right) = S_{n+1}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} k2^{-k} = 2\left(1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}\right)$