.

Corrections TD 2 : Matrices et Systèmes Linéaires

Exercice $\boxed{3}$ Multiplications matricielles

1. Par commodité, nous écrivons $\mathcal{M}_{a;b}$ a lieu de $\mathcal{M}_{a;b}(\mathbb{R})$ et on note $\mathcal{M}_{a;b} \times \mathcal{M}_{b;c} \longrightarrow \mathcal{M}_{a;c}$ le typage fonctionnel du produit matriciel réalisé (avec a, b et c trois entiers naturels non nuls.)

   On étudie une par une les matrices fournies en les proposant comme facteur gauche et en listant les facteurs droits possibles. A cette fin, notons que :

$$A \in \mathcal{M}_{2;2} \quad B \in \mathcal{M}_{2;3} \quad C \in \mathcal{M}_{3;3} \quad D \in M_{3;4} \quad M \in \mathcal{M}_{4;4} \quad N \in \mathcal{M}_{4;4} \quad P \in \mathcal{M}_{5;3} \quad Q \in \mathcal{M}_{3;4}$$

   - *Etude avec A à gauche* : On doit réaliser un produit de type $\mathcal{M}_{2;2} \times \mathcal{M}_{2;c} \longrightarrow \mathcal{M}_{2;c}$
     Les seules matrices convenant sont A et B. Ainsi, on peut réaliser les produits $A \times A = A^2$ et AB.
   - *Etude avec B à gauche* : On doit réaliser un produit de type $\mathcal{M}_{2;3} \times \mathcal{M}_{3;c} \longrightarrow \mathcal{M}_{2;c}$
     Les seules matrices convenant sont C, D et Q. Ainsi, on peut réaliser les produits BC, BD et BQ.
   - *Etude avec C à gauche* : On doit réaliser un produit de type $\mathcal{M}_{3;3} \times \mathcal{M}_{3;c} \longrightarrow \mathcal{M}_{3;c}$
     Les seules matrices convenant sont C, D et Q. Ainsi, on peut réaliser les produits C^2, CD et CQ.
   - *Etude avec D à gauche* : On doit réaliser un produit de type $\mathcal{M}_{3;4} \times \mathcal{M}_{4;c} \longrightarrow \mathcal{M}_{3;c}$
     Les seules matrices convenant sont M et N. Ainsi, on peut réaliser les produits DM et DN.
   - *Etude avec M à gauche* : On doit réaliser un produit de type $\mathcal{M}_{4;4} \times \mathcal{M}_{4;c} \longrightarrow \mathcal{M}_{4;c}$
     Les seules matrices convenant sont M et N. Ainsi, on peut réaliser les produits M^2 et MN.
   - *Etude avec N à gauche* : On doit réaliser un produit de type $\mathcal{M}_{4;4} \times \mathcal{M}_{4;c} \longrightarrow \mathcal{M}_{4;c}$
     Les seules matrices convenant sont M et N. Ainsi, on peut réaliser les produits N^2 et NM.
   - *Etude avec P à gauche* : On doit réaliser un produit de type $\mathcal{M}_{5;3} \times \mathcal{M}_{3;c} \longrightarrow \mathcal{M}_{5;c}$
     Les seules matrices convenant sont D, Q et C. Ainsi, on peut réaliser les produits PD, PQ et PC.
   - *Etude avec Q à gauche* : On doit réaliser un produit de type $\mathcal{M}_{3;4} \times \mathcal{M}_{4;c} \longrightarrow \mathcal{M}_{3;c}$
     Les seules matrices convenant sont M et N. Ainsi, on peut réaliser les produits QM et QN.

   On peut ainsi remarquer que, parmi les 64 couples de matrices potentiels, seuls 19 correspondent à des produits réalisables, 4 d'entre eux étant des carrés.

2. D'après la question précédente, seuls AB, BC et BD sont réalisables. On en donne les matrices résultantes :

$$AB = \begin{pmatrix} -38 & -35 & 12 \\ 14 & 7 & -4 \end{pmatrix} \quad ; \quad BC = \begin{pmatrix} 16 & 14 & -9 \\ 47 & 57 & -16 \end{pmatrix} \quad ; \quad BD = \begin{pmatrix} -18 & 7 & -3 & 1 \\ -44 & -6 & -6 & 15 \end{pmatrix}$$

3. On donne donc :

$$MN = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 6 & 38 \\ 25 & -2 & -11 & 32 \\ 8 & 21 & 35 & 59 \\ 23 & 4 & 8 & 19 \end{pmatrix} \quad ; \quad NM = \begin{pmatrix} 6 & 32 & 5 & -11 \\ 16 & 18 & -28 & 19 \\ 9 & -8 & -5 & -3 \\ 52 & 25 & -34 & 44 \end{pmatrix}$$

   et on remarque que $MN \neq NM$ ces deux matrices ne commutent pas.

4. On observe que XQ admet pour résultat la matrice X dans laquelle seules les trois premières colonnes sont recopiées à l'identique, puis la quatrième est complétée par des "0". Comme X possède trois colonnes pour que la multiplication soit licite, le résultat ne peut être, à proprement parler, la matrice X elle-même.

   De même, on observe que les produits QX reproduisent X mais en ôtant les lignes au-delà de la troisième. Or, X doit avoir 4 lignes pour que la multiplication soit réalisable. Donc $QX \neq X$. Aucune matrice ne convient.

Exercice $\boxed{5}$ On applique la méthode de résolution consistant à réécrire (S_k) sous forme matricielle en posant $A_k = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrice des coefficients, à calculer $d_k = det(A_k)$ à vérifier $d_k \neq 0$ puis à écrire :

$$(S_k)\ :\ A_k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \iff \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_k^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

De façon synthétique, pour k allant de 1 à 4 on obtient alors :

- *Système* (S_1) : La matrice correspondante est $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ de déterminant $d_1 = 13$ donc A_1 est inversible et on a :

$$A_1^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{13} \\ \\ \frac{14}{13} \end{pmatrix}$$

  et finalement, le couple solution (unique) est $(x; y) = \left(\frac{9}{13}; \frac{14}{13}\right)$

- *Système* (S_2) : La matrice correspondante est $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ de déterminant $d_2 = \frac{1}{3}$ donc A_2 est inversible et on a :

$$A_2^{-1} = 3 \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

  et finalement, le couple solution (unique) est $(x; y) = \left(-\frac{2}{5}; \frac{6}{5}\right)$

- *Système* (S_3) : La matrice correspondante est $A_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 4 \\ 2 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$ de déterminant $d_3 = -\frac{73}{8}$ donc A_3 est inversible et on a :

$$A_3^{-1} = -\frac{8}{73} \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -4 \\ -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{8}{73} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 4 \\ 2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{17}{146} \\ \\ \frac{26}{73} \end{pmatrix}$$

  et finalement, le couple solution (unique) est $(x; y) = \left(-\frac{17}{146}; \frac{26}{73}\right)$

- *Système* (S_4) : La matrice correspondante est $A_4 = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ de déterminant $d_4 = -\frac{13}{18}$ donc A_4 est inversible et on a :

$$A_4^{-1} = -\frac{18}{13} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{18}{13} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{18}{65} \\ \\ -\frac{24}{13} \end{pmatrix}$$

  et finalement, le couple solution (unique) est $(x; y) = \left(\frac{18}{65}; -\frac{24}{13}\right)$