Lycée Turgot | Corrigé $I_2(k)$ | ECT-2 2024/2025

$\boxed{\text{Cas } k = A}$

Exercice I

On charge les bibliothèques : (1) from math import *
(2) import numpy as np

1°/
```
T = np.array([[-2,0,2,3,5,95],[95,45,23,17,8,1]])
```

2°/
```
E = np.zeros([2,6])
efftot = np.sum(T[1,])
for k in range(6):
    E[0,k] = T[0,k]
    E[1,k] = T[1,k]/efftot   # fréquence
    for i in range(k):       # cumul
        E[1,k] = E[1,k]+T[1,i]/efftot
print(E)
```

(NB : un appel de np.cumsum est recevable)

Exercice II

On pose $a_n = \dfrac{2^n}{3^{2n-2}} = \dfrac{2^n}{9^n \times 3^{-2}} = 9\left(\dfrac{2}{9}\right)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow a_{n+1} = 9\left(\dfrac{2}{9}\right)^{n+1} = 9 \cdot \dfrac{2^{n+1}}{9^n \times 9} = \dfrac{2^{n+1}}{9^n}$

Il vient que $\forall N \in \mathbb{N}^*$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{2^{n+1}}{9^n} - \frac{2^n}{3^{2n-2}}\right)$

$= \displaystyle\sum_{n=0}^{N}(a_{n+1} - a_n) = a_{N+1} - a_0$ par télescopage

Or $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} a_{N+1} = \lim_{N\to+\infty} \frac{2^{N+2}}{9^{N+1}} = \frac{4}{9}\left(\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^N\right)$

$= \dfrac{4}{9} \times 0 = 0$

puisque $\left|\dfrac{2}{9}\right| < 1$ (reconnaissance d'un terme géométrique)

Il vient que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{2^{n+1}}{9^n} - \frac{2^n}{3^{2n-2}}\right) = 0 - a_0$ est réel

D'où $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2^{n+1}}{9^n} - \frac{2^n}{3^{2n-2}}\right)$ converge et sa

somme vaut $-a_0 = -9$

Exercice III

1°/ $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 20 & 0 \end{pmatrix}$ et $-5A = \begin{pmatrix} -15 & 5 \\ -20 & -10 \end{pmatrix}$

et ainsi $A^2 - 5A + 10 I_2 = \begin{pmatrix} 5-15+10 & -5+5+0 \\ 20-20+0 & 0-10+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2°/ $\det(A) = 6+4 = 10 \neq 0$ donc A est inversible

avec : $A^{-1} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

On a donc (x,y) solution de (S) ssi $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -3/4 \end{pmatrix}$

soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1/3 \\ -3/4 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 \\ -3/4 \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{120}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{120}\begin{pmatrix} -1 \\ -43 \end{pmatrix}$

Finalement $x = -\dfrac{1}{120}$ et $y = -\dfrac{43}{120}$

$S = \left\{\left(-\dfrac{1}{120} ; -\dfrac{43}{120}\right)\right\}$

Cas $k = B$

Exercice I

On charge les bibliothèques (1) from math import *
(2) import numpy as np

1°/ T = np.array([[-5, 0, 5, 15, 45, 195], [213, 107, 43, 13, 3, 1]])

2°/
```
E = 0
for k in range(6):
    E = E + T[0,k] * T[1,k]
efftot = np.sum(T[1,:])
E = E / efftot
```

Exercice II

posons $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 4$ et $S_N = \sum_{n=3}^{N} \frac{5^n - 2^n}{6^n}$

On a $S_N = \sum_{n=3}^{N}\left(\frac{5^n}{6^n} - \frac{2^n}{6^n}\right) = \sum_{n=3}^{N} \frac{5^n}{6^n} - \sum_{n=3}^{N} \frac{2^n}{6^n}$ par linéarité de Σ

d'où $\forall N \geq 4 \quad S_N = \sum_{n=3}^{N}\left(\frac{5}{6}\right)^n - \sum_{n=3}^{N}\left(\frac{2}{6}\right)^n$

or $\sum_{n\geq 3}\left(\frac{5}{6}\right)^n$ est une série géométrique convergente

Comme $\left(\frac{5}{6}\right) \in]-1,1[$ et on calcule :

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n - 1 - \frac{5}{6} - \left(\frac{5}{6}\right)^2$$
$$= \frac{1}{1-5/6} - \frac{36+30+25}{36} = 6 - \frac{91}{36}$$

De façon analogue, comme $\left(\frac{\ }{6}\right) = \frac{\ }{3} \in]-1,1[$ on a :

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-1/3} - 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{3}{2} - \frac{9+3+1}{9}$$
$$= \frac{3}{2} - \frac{13}{9}$$

Finalement $\lim_{N \to +\infty} S_N = \sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n - \sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$
$$= 6 - \frac{91}{36} - \frac{3}{2} + \frac{13}{9}$$
$$= \frac{9}{2} + \frac{52-91}{36} = \frac{9}{2} - \frac{13}{12}$$

La série $\sum_{n\geq 3} \frac{5^n - 2^n}{6^n}$ converge et sa somme vaut $\frac{41}{12}$

Exercice III

1°/ calculons $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -21 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow B^3 = \begin{pmatrix} 8 & -117 \\ 0 & 125 \end{pmatrix}$ or $\det(B) = 10 \neq 0$ donc

B est inversible avec $B^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2°/ posons $BX = XB \iff BXB^{-1} = X$ car B inversible

Calculons $BXB^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
$$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10x - 15z & 6x - 9z + 4y - 6t \\ 25z & 15z + 10t \end{pmatrix}$$

Ce qui conduit à résoudre : $\begin{pmatrix} 10x - 15z & 6x + 4y - 9z - 6t \\ 25z & 15z + 10t \end{pmatrix} = 10X$

$\iff \begin{cases} \cancel{10x} - 15z = \cancel{10x} \\ 6x + 4y - 9z - 6t = 10y \\ 25z = 10z \\ 15z + \cancel{10t} = \cancel{10t} \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ 6x - 6t = 6y \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ y = x - \end{cases}$

Soit X s'écrit $\begin{pmatrix} x & x-t \\ 0 & t \end{pmatrix}$ $x\in$ $t\in$