Interrogation $I_4(A)$

Exercice I : Matrice à verse

On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $B = (A - 2I_3)^2$ où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3
2. Calculer AB
3. La matrice A est-elle inversible ? justifier.

Exercice II : Couple urne petite pièce (s'il vous plait)

On considère une urne contenant six boules numérotées, indiscernables au toucher : l'une porte le numéro 3, deux portent le numéro deux et les autres portent le numéro 1.
On tire une boule de l'urne et on note N la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule. On lance ensuite autant de pièces équilibrées que le numéro N obtenu et on note Y de Bernoulli qui vaut 1 si au moins une de ces pièces fait *pile*

1. Déterminer la loi de N et vérifier que son espérance est $\dfrac{5}{3}$.
2. Calculer, en justifiant très soigneusement, la valeur de $\mathbb{P}([N = 1] \cap [Y = 1])$
3. Sans justification supplémentaire, dresser le tableau de loi du couple $(N; Y)$
4. En justifiant, déterminer la loi marginale de Y.
5. En déduire la valeur $\mathbb{E}[Y]$.
6. Calculer $\mathbb{E}[NY]$ et en déduire que $cov(N; Y) = \frac{1}{9}$

Exercice III : Formulaires

Les questions qui suivent sont mutuellement indépendantes (vos réponses feraient bien de ne pas être des variables aléatoires en revanche)

1. Calculer et simplifier au plus la valeur de $B_n = \binom{n+1}{2} - \binom{n}{n-2}$ où $n \geq 2$ est un entier naturel
2. Calculer et simplifier au mieux $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{2}{3^k}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$
3. Calculer la dérivée de $f : x \mapsto xe^{1-x}$ définie sur $\mathbb{R}$ (et dérivable sur $\mathbb{R}$: admis)

Interrogation $I_4(B)$

Exercice I : Matrice BéBé-8

On donne la matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer B^2
2. En déduire explicitement $B^2 - 8B$
3. La matrice B est-elle inversible ? justifier.

Exercice II : Couple dés-pièces (pour les gagnants)

On dispose d'un dé à 6 faces équilibrées sur lequel trois faces portent le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et une face porte le numéro 3. On lance ce dé et on note D la variable aléatoire égale au numéro obtenu. On lance ensuite autant de pièces équilibrées que le numéro D obtenu et on note X la variable de Bernoulli qui vaut 1 si au moins une de ces pièces fait *face*

1. Déterminer la loi de D et vérifier que son espérance est $\frac{5}{3}$.
2. Calculer, en justifiant très soigneusement, la valeur de $\mathbb{P}([D = 3] \cap [X = 0])$
3. Sans justification supplémentaire, dresser le tableau de loi du couple $(D; X)$
4. En justifiant, déterminer la loi marginale de X.
5. En déduire la valeur $\mathbb{E}[X]$.
6. Calculer $\mathbb{E}[DX]$ et en déduire que $cov(X; D) = \frac{1}{9}$

Exercice III : Formulaires

Les questions qui suivent sont (mutuellement indépendantes (vos réponses feraient bien de ne pas être des variables aléatoires en revanche)

1. Calculer et simplifier au plus la valeur de $C_n = \frac{12}{n}\binom{n-1}{3} \times \binom{n+1}{n-1}$ où $n \geq 2$ est un entier naturel
2. Calculer et simplifier au mieux $\sum_{k=1}^{n+2} \frac{3}{2^k}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$
3. Calculer la dérivée de $f : x \mapsto (1 - 2x)e^x$ définie sur $\mathbb{R}$ (et dérivable sur $\mathbb{R}$: admis)