Lycée Turgot

$\boxed{\text{Congé } I_3 (K)}$

ECT-2

2024/2025

$\boxed{\text{Cas } K = A}$

Exercice I

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] L_2 \leftarrow -L_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] L_1 \leftarrow L_1 - L_3$$

On propose donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice II

1/ Le tableau permet d'identifier $X(\Omega) = \{-1; 0; 2\}$
$Y(\Omega) = \{1; 2; 4\}$

2/ On doit avoir $\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} P[(X,Y) = (x,y)] = 1$

on a ainsi $a + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{6} = 1$

$\Leftrightarrow a = 1 - \frac{1}{24}(2 + 6 + 4 + 1 + 4) = 1 - \frac{17}{24}$

Soit $a = 7/24$

3/ pour $x \in \{-1; 0; 2\}$ on a :

$$P[X = x] = \sum_{y \in Y(\Omega)} P([Y = y] \cap [X = x])$$

D'après la formule des probabilités totales, comme $([Y = y])_{y \in \{1;2;4\}}$ forment un Système Complet d'événements.

Soit, en complétant le tableau par les sommes

$x \backslash y$	1	2	4	Σ
-1	1/12	1/4	0	1/3
0	0	1/6	1/24	5/24
2	1/6	0	7/24	4/24
Σ	1/4	5/12	1/3	1

que l'on résume :

$x =$	-1	0	2	$\Sigma =$
$P[X=x]$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{11}{24}$	1

et Similairement pour

$$P[Y = y] = \sum_{x \in X(\Omega)} P([X = x] \cap [Y = y])$$

ce qui se résume ainsi :

$y =$	1	2	4	$\Sigma =$
$P[Y=y]$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	1

4/ Nous Donnons les tableaux de produits Successifs :

$x \backslash y$	1	2	4
-1	-1	-2	-4
0	0	0	0
2	2	4	8

xy

$x \backslash y$	1	2	4	Σ
-1	-1/12	-1/2	0	-7/12
0	0	0	0	0
2	1/3	0	7/3	8/3

$xy\, P([X = x] \cap [Y = y])$

et finalement $E[XY] = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xy\, P([X = x] \cap [Y = y])$

$= -\frac{7}{12} + 0 + \frac{8}{3} = \frac{25}{12}$

Soit $\boxed{E[XY] = \frac{25}{12}}$

Exercice III

On a $\frac{2^n}{4^{n-2}} = 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ terme d'une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ vérifiant $|q| < 1$ donc $\sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ cv et, par linéarité, $\sum_{n \geq 2} 16 \left(\frac{1}{2}\right)^n$ aussi.

On calcule : $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{4^{n-2}} = 16 \times \left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2}\right] = 16 \times \frac{1}{2} = 8.$

$\boxed{\text{Cas } K = B}$

Exercice I

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 \text{ [inchangée]} \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -2 & -4 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_3 \leftarrow -L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{array}\right]$$

[Fin]

D'où Q est inversible d'inverse $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice II

1/ Le tableau permet de lire $X(\Omega) = \{2; 3; 5\}$ et $Y(\Omega) = \{-1; 1; 2\}$

2/ La loi conjointe du couple $(X; Y)$ vérifie :

$1 = \sum_{(x;y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} \mathbb{P}[(X;Y) = (x;y)] = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + b + \frac{1}{24} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

$\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{24}[6 + 2 + 1 + 4 + 4] = 6 \Rightarrow b = \frac{7}{24}$

3/ On a $Y(\Omega) = \{-1; 1; 2\}$ d'où $([Y=-1]; [Y=1]; [Y=2])$ forme un système complet d'événements et ainsi, par la formule des probabilités totales :

$\mathbb{P}[X = x] = \sum_{k \in \{-1;1;2\}} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = k])$ pour $x \in \{2;3;5\}$

Soit : $\mathbb{P}[X = 2] = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + 0 = \frac{1}{3}$

$\mathbb{P}[X = 3] = b + \frac{1}{24} = \frac{1}{3}$

$\mathbb{P}[X = 5] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

et de façon similaire :

$\mathbb{P}[Y = -1] = \frac{5}{12}$

$\mathbb{P}[Y = 1] = 3/8$

$\mathbb{P}[Y = 2] = 5/24$

4/ On va calculer $\mathbb{E}[XY] = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} (xy) \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$ à l'aide des tableaux :

Produits	-1	1	2
2	-2	2	4
3	-3	3	6
5	-5	5	10

$xy\mathbb{P}$	-1	1	2
2	$-1/2$	$1/6$	0
3	0	$7/8$	$1/4$
5	$-5/6$	0	$5/3$

et finalement :

$\mathbb{E}[XY] = -\frac{1}{3} + \frac{9}{8} + \frac{5}{6}$

$\Rightarrow \mathbb{E}[XY] = \frac{39}{24} = \frac{13}{8}$

Exercice III

Commençons par calculer, pour $n \in \mathbb{N}$; $\frac{3^{n-1}}{6^{n-3}} = \frac{3^{-1}}{6^{-3}} \times \left(\frac{3}{6}\right)^n = 72\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Ainsi, l'étude de T revient à celle de $\sum_{n \geq 3} 72 \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Or $|1/2| < 1$ donc $\sum_{n \geq 3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ cv comme série géométrique et ainsi, par linéarité de Σ on a $\sum_{n \geq 3} 72 \left(\frac{1}{2}\right)^n$ cv

donc T converge et sa somme vaut :

$\sum_{n=3}^{+\infty} 72 \left(\frac{1}{2}\right)^n = 72 \left[\frac{1}{1 - 1/2} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right] = 72 \times \frac{1}{4} = 18$