.

Problèmes de Synthèse

Exercice $\boxed{1}$ D'après BSB-2020

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \;;\; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \;;\; C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;;\; D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;;\; P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.
   (b) Vérifier que $A^2 - 2A$ est la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (c) On note $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   Calculer AU et AV.
   (d) Vérifier que l'on a $C = P^{-1}AP$.
2. (a) Exprimer B à l'aide de I_2 (identité de taille 2) et de A.
   (b) Exprimer D à l'aide de I_2 (identité de taille 2) et de C.
   (c) Calculer $P^{-1}BP$. Que remarque-t-on ?
3. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n on a $P^{-1}B^nP = D^n$
   (b) Exprimer D^n explicitement en fonction de $n \in \mathbb{N}$
   (c) En déduire une expression explicite de B^n en fonction de l'entier $n \in \mathbb{N}$.
   On vérifiera que : $B^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}$
4. Alice et Bob s'affrontent aux cartes dans une successions de parties en duels. On suppose que lors de chaque duel, le joueur qui a remporté le duel précédent *prend la pioche* (pioche en premier).
   On admetttra que le joueur qui prend la pioche lors d'un duel a une probabilité de $\frac{2}{3}$ de gagner ce duel et que son adversaire a alors une probabilité de $\frac{1}{3}$ de remporter ce duel.
   On désignera dans la suite par A_n l'événément *Alice gagne le nième duel* et par B_n l'événément *Bob gagne le nième duel* et on écrira $a_n = \mathbb{P}[A_n]$ ainsi que $b_n = \mathbb{P}[B_n]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
   Enfin, c'est Alice qui prend la pioche du premier duel.
   (a) Donner les valeurs de a_1 et b_1 puis calculer a_2 (vérifier que $a_2 = \frac{5}{9}$).
   (b) Alice a remporté le deuxième duel : quelle est alors la probabilité qu'elle ait remporté le premier duel ?
   (c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n$.
   Exprimer de même b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n.
   (d) On note X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ pour $n \geq 1$. Vérifier que $X_{n+1} = \frac{1}{3}BX_n$
   (e) Etablir par récurrence sur $n \geq 1$ entier que $X_n = 3^{1-n}B^{n-1}X_1$
   (f) En déduire a_n puis de b_n de façon explicite pour $n \geq 1$
   On vérifiera que $a_n = \dfrac{3^n + 1}{2 \times 3^n}$
5. **Python**
   (a) Créer un script Python qui simule la réalisation de 20 duels successifs entre Alice et Bob et annonce le nombnre de parties gagnées par Alice et le nombre de parties gagnées par Bob
   (b) Compléter le programme qui précède pour qu'il renvoie la moyenne et l'écart-type des duels remportés par Alice.

Exercice $\boxed{2}$ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} f(x) & = & \dfrac{x^2+x+1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \text{ pour } x>0 \\ f(0) & = & 0. \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe reprasentative de f dans un repère orthonormé (on pourra prendre 5cm pour 1 unité graphique)

Partie A

1. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y=1$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$.
2. La fonction f est-elle continue en $x=0$? Justifier.
3. Pour $x>0$, calculer $\tau_x = \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.
4. Etudier la limite de τ_x lorsque x tend vers 0.
   Que peut-on en déduire pour la fonction f ?
5. Vérifier que pour tout réel $x>0$ on a $f'(x) = \dfrac{1-x}{x^4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.
6. Etudier les variations de la fonction f et dresser le tableau des variations de f.

Partie B

On introduit une nouvelle fonction g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = f(x) - xf'(x)$.

1. Démontrer que le polynôme x^3+x^2+2x-1 admet une seule racine réelle α.
2. Etablir que $g(x)=0$ si, et seulement si, $x=\alpha$.
3. On pose $A = \dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$. Montrer que $A = f'(\alpha)$.
4. Pour tout $a>0$, on note T_a la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a.
5. Montrer que T_a a pour équation $y = Ax$. Tracer T_a, puis la courbe $\mathcal{C}$.
   Déduire des questions précédentes que de toutes les tangentes T_a à $\mathcal{C}$ (en des points d'abscisses non nulles), seule T_α passe par l'origine O.

Partie C

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   Déterminer le signe de $u_{n+1}-u_n$ et en déduire que la suite (u_n) est croissante (on ne cherchera pas à calculer explicitement u_n)
2. Démontrer que la fonction h, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
3. En déduire une expression explicite de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Etudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice $\boxed{3}$ **d'après ESCP 2018**

Dans tout l'exercice, on pose : $I_0 = \displaystyle\int_1^e t\,dt$ *et, pour tout* n *de* $\mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_1^e t\,(ln(t))^n\ dt$.

1. (a) Calculer I_0.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $I_n \geq 0$.
   (c) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante puis qu'elle est convergente.
2. (a) Pour tout entier naturel n, soit f_n la fonction définie sur l'intervalle $[1, \mathrm{e}]$ par : $\forall t \in [1,\mathrm{e}]\ ,\ f_n(t) = (\ln(t))^{n+1}$.
   On note f'_n la dérivée de la fonction f_n. Pour tout t de $[1, \mathrm{e}]$, calculer $f'_n(t)$.

(b) A l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout entier naturel n, la relation $(*)$ suivante :

$$2I_{n+1} + (n+1)I_n = \mathrm{e}^2 \quad (*)$$

(c) En déduire la valeur de I_1.

(d) En utilisant la relation $(*)$ et la décroissance de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$, établir pour tout entier naturel n, l'encadrement suivant :

$$\frac{\mathrm{e}^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{\mathrm{e}^2}{n+2}.$$

Indication : traiter les deux inégalités de façon séparée et, pour celle de droite, commencer par établir, que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $I_{n+1} \leq \dfrac{\mathrm{e}^2}{n+3}$.

(e) En déduire les limites respectives des deux suites $(I_n)_{n\geq 0}$ et $(nI_n)_{n\geq 0}$.

(f) Utiliser la relation $(*)$ pour compléter le script *Python* suivant afin qu'il calcule et affiche I_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
import numpy as np
n=int(input("donner une valeur à n :"))
I=....................................
for k in range(1,n+1):
        I=................................
print(I)
```

3. (a) Etablir pour tout entier naturel n, l'encadrement :

$$\frac{(3n+10)\mathrm{e}^2}{(n+3)(n+4)} \leq 2I_{n+1} + I_n \leq \frac{(3n+7)\mathrm{e}^2}{(n+2)(n+3)}.$$

(b) Pour tout entier naturel n, on pose : $w_n = n\left(\mathrm{e}^2 - nI_n\right)$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 3\,\mathrm{e}^2$.

4. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir pour tout entier naturel n, l'égalité :

$$I_n = \frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}\left(\mathrm{e}^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{k!} - 1\right).$$

Exercice $\boxed{4}$ D'après ESCP 2020

On dispose d'une pièce supposée équilibrée et on procède à des lancers successifs.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier *pile* et Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier *face*.

1. Donner la loi commune à X et à Y ainsi que les valeurs de l'espérance et de variance de X.
2. Que vaut $\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1])$? En déduire que X et Y ne sont pas indépendantes.
3. (a) Montrer que, pour tout $j \geq 2$ on a $\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=j]) = \mathbb{P}[Y=j]$
   (b) Montrer que, pour tout $i \geq 2$ on a $\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=1]) = \mathbb{P}[X=i]$
   (c) En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire XY et préciser $XY(\Omega)$
   (d) Calculer la valeur de covariance de X avec Y. En déduire que $\mathbb{V}[X+Y] = 2$
4. (a) Déterminer la loi de probabilité de $X+Y$ (on précisera $(X+Y)(\Omega)$)
   (b) Etablir que $X+Y$ et $XY+1$ ont même loi de probabilité
5. **Python** On code *pile* par 1 et *face* par 0.
   Compléter le script suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage des valeurs prises par les variables aléatoires X et Y lors de l'expérience réalisée dans cet exercice :

```
from math import*
import numpy as np
import random.numpy as rd
lancer = floor(rd.random()*2)
if ..................
        while lancer == 1:
                lancer = .......................
                Y= ............................
else :
        while ..........
                ..............................
                X=............................
print(X)
print(Y)
```

En vrac mais à partir de vrais sujets

Exercice $\boxed{5}$ On se donne des variables aléatoires A_i pour $i \in \mathbb{N}$ avec $A_0 = 0$ (certaine) et vérifiant :

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}_{[A_{i-1}=i-1]}[A_i = i] = \frac{i}{i+1} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{[A_{i-1}=i-1]}[A_i = 0] = \frac{1}{i+1}$$

Déterminer l'ensemble des valeurs possibles de chaque variable aléatoire A_i pour $i \in \mathbb{N}$.

Exercice $\boxed{6}$ La variable aléatoire U vérifie $\mathbb{P}[U = k] = \dfrac{1}{k(k+1)}$ pour $k \geq 1$ entier.

1. Démontrer que $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et en particulier que $\mathbb{P}[U = 0] = 0$.
2. Cette variable aléatoire admet-elle une espérance ? On pourra établir puis utiliser $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k}$ pour $k \geq 1$.

Exercice $\boxed{7}$ On considère la série dont la somme est définie par :

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+1}{k!} e^{-k}$$

Justifier que la série (associée) converge puis en déterminer la valeur de somme S.

Exercice $\boxed{8}$ On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

Démontrer que $A^3 - 3A^2$ est proportionnelle à I_3 et en déduire que A est inversible.
Ecrire une instruction en Python permettant de saisir A puis de calculer A^{-1}.

Exercice $\boxed{9}$ On donne $p(x) = x^3 - 3x^2 - \frac{9}{4}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
Etablir que p n'admet qu'une unique racine réelle α puis la placer entre deux entiers consécutifs.