

## Lois usuelles discrètes

Nous proposons de résumer les lois usuelles au moyen de cartes d'identité des lois

### Lois finies

Les lois de cette section sont dites *finies*, c'est-à-dire correspondent aux cas de type card  $[X(\Omega)] \in \mathbb{N}$ .  
Il s'agit, pour ces lois, de rappels de première année.

### Loi Certaine

**Utilisation :** Intérêt théorique, rejet d'hypothèse d'aléatoire. Issue déterministe

**Notation :** On écrit souvent  $\mathbb{1}$  pour désigner une variable aléatoire certaine égale à 1.  
On pourra donc écrire  $a\mathbb{1}$  pour désigner une variable aléatoire certaine égale à  $a \in \mathbb{R}$ .

**Ensemble de valeurs** On a  $\mathbb{1}(\Omega) = \{1\}$  et donc  $a\mathbb{1}(\Omega) = \{a\}$

**Loi de probabilité :**  $a$  étant un réel fixé, si  $X$  suit la même loi certaine que  $a\mathbb{1}$  alors :

$x$	$a$	$\neq a$
$\mathbb{P}[X = x]$	1	0

**Indicateurs :** Le couple espérance-variance est donné par :

- $\mathbb{E}[\mathbb{1}] = 1$  et (par linéarité)  $\mathbb{E}[a\mathbb{1}] = a$
- $\mathbb{V}[\mathbb{1}] = 0$  et  $\mathbb{V}[a\mathbb{1}] = 0$

### Loi Uniforme (discrète)

**Utilisation :** Situation d'équiprobabilité générant des nombres entiers de  $a$  à  $b$ .

**Notation :** On écrit  $\mathcal{U}[[a ; b]]$  avec  $a \leq b$  entiers.

**Ensemble de valeurs** Si  $X$  suit une loi  $\mathcal{U}[[a ; b]]$  alors  $X(\Omega) = [[a ; b]]$  de cardinal  $N = b - a + 1$ .

**Loi de probabilité :** Les paramètres  $a$  et  $b$  étant des entiers naturels avec  $a < b$  on a :

$$\forall k \in [[a ; b]] \quad \mathbb{P}[X = k] = \frac{1}{b - a + 1} \quad ; \quad \text{sous forme de tableau :}$$

$x$	$a$	$a + 1$	$\dots$	$b$
$\mathbb{P}[X = x]$	$\frac{1}{b - a + 1}$	$\frac{1}{b - a + 1}$	$\dots$	$\frac{1}{b - a + 1}$

*Remarque :* Si  $a = b$ , la loi est certaine.

**Indicateurs :** Le couple espérance-variance de  $X \hookrightarrow \mathcal{U}[[a ; b]]$  est donné par :

- $\mathbb{E}[X] = \frac{b + a}{2}$
- $\mathbb{V}[X] = \frac{N^2 - 1}{12}$  où  $N = b - a + 1$ .

**Attendu :** Savoir retrouver une loi uniforme  $\mathcal{U}[[a ; b]]$  avec  $a < b$  entiers, à partir de la connaissance particulière de  $\mathcal{U}[[1 ; n]]$ , au moyen de la transformation :

$$X = U - 1 + a$$

avec  $U \hookrightarrow \mathcal{U}[[1 ; n]]$  en posant  $n = b - a + 1$ . Les valeurs  $a$  et 1 sont assimilables aux variables certaines  $a\mathbb{1}$  et  $\mathbb{1}$  respectivement.

**Loi de Bernoulli**

**Utilisation :** Etude d'une expérience générique avec discrimination type *succès / échec*.

On encode en binaire la réalisation du succès :

événement	Succès	Echec
VAR	1	0

**Notation :** On écrit  $\mathcal{B}(p)$  avec  $p$  probabilité du succès.

**Ensemble de valeurs** Si  $X$  suit une loi  $\mathcal{B}(p)$  alors  $X(\Omega) = \{0; 1\}$ .

**Loi de probabilité :** Le paramètre  $p$  étant dans  $[0; 1]$  on a :

$x$	0	$\neq 1$
$\mathbb{P}[X = x]$	$1 - p$	$p$

**Indicateurs :** Le couple espérance-variance de  $X \leftrightarrow \mathcal{B}(p)$  est donné par :

- $\mathbb{E}[X] = p$
- $\mathbb{V}[X] = p(1 - p)$

**Loi Binomiale**

**Utilisation :** Nombre de succès d'un schéma de Bernoulli à  $n$  répétitions.

On peut aussi la voir comme somme de variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre  $p$ .

**Notation :** On écrit  $\mathcal{B}(n; p)$  avec  $p$  probabilité du succès et  $n$  le nombre d'épreuves réalisées.

**Ensemble de valeurs** Si  $X$  suit une loi  $\mathcal{B}(n; p)$  alors  $X(\Omega) = \llbracket 0 ; n \rrbracket$ .

**Loi de probabilité :** Le paramètre  $p$  étant dans  $[0; 1]$  et  $n$  étant un entier naturel on a :

$$\forall k \leq n \quad \mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

**Indicateurs :** Le couple espérance-variance de  $X \leftrightarrow \mathcal{B}(n; p)$  est donné par :

- $\mathbb{E}[X] = np$
- $\mathbb{V}[X] = np(1 - p)$

voir fiche -loi binomiale- pour plus de détails

## Lois discrètes infinies

Dans cette section, les variables aléatoires réelles étudiées vérifient :  $X(\Omega)$  est en bijection avec  $\mathbb{N}$

### Loi géométrique

**Utilisation :** nombre de répétitions effectuées dans un schéma de Bernoulli amenant le premier succès.

On peut aussi la voir comme *temps discret d'attente* du premier succès.

**Notation :** On écrit  $\mathcal{G}(p)$  avec  $p \in ]0; 1[$  probabilité du succès.

**Ensemble de valeurs** Si  $X$  suit une loi  $\mathcal{G}(p)$  alors  $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ .

**Loi de probabilité :** Le paramètre  $p$  étant dans  $]0; 1[$  on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}[X = n] = p(1 - p)^{n-1}$$

**Indicateurs :** Le couple espérance-variance de  $X \leftrightarrow \mathcal{G}(p)$  est donné par :

- $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$
- $\mathbb{V}[X] = (1 - p)p^{-2} = \frac{1 - p}{p^2}$

### Lois de référence usuelles discrètes infinies

Les lois qui suivent sont explicitement au programme ECT de seconde année (troisième semestre) et leur connaissance est un attendu des programmes.

#### Loi de Poisson

**Utilisation :** En dehors d'une reconnaissance formelle, ou d'une mention explicite de cette loi dans un énoncé, il n'est pas attendu de savoir reconnaître une situation concrète relevant de la loi de Poisson.

**Notation :** On écrit  $\mathcal{P}(\lambda)$  avec  $\lambda > 0$  paramètre

**Ensemble de valeurs** Si  $X$  suit une loi  $\mathcal{P}(\lambda)$  alors  $X(\Omega) = \mathbb{N}$ .

**Loi de probabilité :** Le paramètre  $\lambda$  étant dans  $\mathbb{R}_+^*$  on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}[X = n] = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!}$$

**Indicateurs :** Le couple espérance-variance de  $X \leftrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$  est donné par :

- $\mathbb{E}[X] = \lambda$
- $\mathbb{V}[X] = \lambda$