Concours Blanc C_1

Durée : quatre heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

Exercice I : Couple avec enfants

On se donne $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul. Dans tout l'exercice, on se place sur un espace de probabilités $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$ sur lequel toutes les variables aléatoires introduites seront définies.

On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et de même loi vérfiant :

- $\mathbb{P}[X = 0] = \mathbb{P}[X = 1] = \dfrac{1}{4}$
- $\mathbb{P}[X = 2] = \dfrac{1}{2}$

On a donc également :

$$\mathbb{P}[Y = 0] = \frac{1}{4} \quad ; \quad \mathbb{P}[Y = 1] = \frac{1}{4} \quad ; \quad \mathbb{P}[Y = 2] = \frac{1}{2}$$

On pose $S = X + Y$ et $T = XY$ et on admet que S et T sont aussi des variables aléatoires.

1. (a) Déterminer l'ensemble $S(\Omega)$ des valeurs prises par S.
   (b) Déterminer la loi de S.
   (c) Etablir que S admet une espérance égale à $\dfrac{5}{2}$.
2. (a) Décrire l'ensemble des valeurs prises par T
   (b) Vérifier que $\mathbb{P}[T = 0] = \dfrac{7}{16}$ puis déterminer la loi de T complètement.
   (c) Démontrer que l'espérance de T vaut $\dfrac{25}{16}$
3. Déterminer la loi (conjointe) du couple $(S; T)$.
4. Vérifier que $\mathbb{E}[ST] = \dfrac{45}{8}$ puis calculer $cov(S; T)$.

Exercice II : Attila et ses uns

On pose H la matrice carrée d'ordre 3 dite *Attila* dont tous les coefficients sont des 1 et on note I la matrice identité de taille 3. On définit enfin $B = H - I$ et on pourra noter O la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients sont des 0.

Partie A -comme Attila

1. Calculer H^2 explicitement
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $H^n = 3^{n-1}H$
3. Justifier que le système (S) donné par :

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & 0 \\ x & +y & +z & = & 0 \\ x & +y & +z & = & 0 \end{cases}$$

n'est pas de Cramer et en déduire que la matrice H n'est pas inversible.

Partie B - comme la lettre après A

1. Vérifier que $B^2 = H + I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ puis exprimer B^2 en seule fonction de B et I.
2. Justifier que B est inversible et expliciter son inverse B^{-1}
3. On considère $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ trois matrices colonnes de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (a) Calculer les produits BU, BV et BW. Que remarquez-vous ?
   (b) Soit Q la matrice carrée d'ordre 3 dont la première colonne est U, la seconde colonne V et enfin la troisième colonne est W. Cacluler BQ explicitement
   (c) Soit $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer QD.
   (d) On donne $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer explicitement QR.
   (e) Déduire du calcul précédant que Q est inversible puis écrire son inverse Q^{-1} en fonction de R. Qu'en est-il de l'inversibilité de R ?

   On pourra admettre dans la suite que l'on a vérifié que $B = QDQ^{-1}$.
4. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $B^n = QD^nQ^{-1}$
   (b) En détaillant vos calculs, vérifier que la première ligne de B^n notée $B^n_{1\star}$ est :

$$B^n_{1\star} = \begin{pmatrix} \dfrac{2^n + 2(-1)^n}{3} & \dfrac{2^n - (-1)^n}{3} & \dfrac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} \end{pmatrix}$$

Partie C - comme coder

Dans cette partie, on se place dans un environnement de programmation Python dans lequel on a chargé les bibliothèques usuelles au moyen des commandes :

```
from math import*
import numpy as np
```

on cherche dans cette section à manipuler dans cet environnement des matrices de taille arbitraire qui généralisent les descriptions de H, I et B.

1. Compléter le script suivant pour qu'il produise la matrice Attila :

```
H = np.zeros([3,3])
for l in range (3):
        for k ..................
                H[l,k] = ..........
print(H)
```

2. Compléter le script de la fonction `Attila`, de la variable n, pour qu'elle produise une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ dont tous les coefficients sont des 1 :

```
def Attila(n):
        H = np.zeros([n,n])
        ..............................
        ..............................
        ..............................
        return(H)
```

3. Proposer un script de fonction `Identite` de variable n pour qu'elle produise la matrice identité, carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.
   On admettra dans la suite du problème que les fonctions `Attila` *et* `Identit` *ont été programmées correctement et on pourra y avoir recours.*
4. Comment peut-on produire la matrice B donnée en début d'exercice au moyen de la console Python ?
5. On donne $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ matrice colonne de taille $n \in \mathbb{N}$ au moins 3 et on pose $x_k = k$ pour $k \leq n$.
   Une statistique donne, pour chacune des valeurs x_k un effectif associé qui est la $k$ième valeur du résultat du produit de `Attila(n)` $-$ `Identite(n)` par X.
   Proposer un script permettant le calcul de la moyenne de cette statistique lorsque n est fourni en entrée.
   On rappelera que la commande `np.dot(A,B)` *effectue la multiplication, si compatible, des matrices* `A` *et* `B`

Exercice III : En harmonie avec la suite

On pose $u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2(n+1)u_n + 1}$$

1. (a) Démontrer que l'on a, ainsi, défini une suite de réels strictements positifs.
   On pourra raisonner par récurrence en montrant que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a u_n bien défini dans $\mathbb{R}_+^*$
   (b) Recopier et compléter la fonction `Python` ci-dessous pour qu'elle renvoie la valeur de u_n à l'appel de la commande `suite(n)` :

```
from math import*
def suite(n):
        u=1/2
        for k ............................
                u = .........................
        return u
```

   (c) On tape `suite(2)` à la console après exécution du programme qui précède. Quelle valeur devrait-on lire en retour ?
2. Vérifier que, formellement, on a $u_3 = \dfrac{1}{12}$
3. (a) Etablir l'encadrement :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 < u_{n+1} < \frac{1}{2(n+1)}$$
   (b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite (en justifiant).
4. Pour tout entier naturel k non nul, on pose : $v_k = \dfrac{1}{u_k}$
   (a) Etablir l'égalité :
$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad v_{k+1} - v_k = 2(k+1)$$
   (b) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle arithmétique ? Justifier.
   (c) Déterminer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_{k+1} - v_k$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$
   (d) En déduire explicitement la valeur de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
   Vous pourrez vérifier la cohérence de vos résultats en retrouvant $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

5. (a) Vérifier, à partir des résultats précédants que, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

On pourra admettre ce résultat dans la suite de l'exercice

   (b) Démontrer que la série de terme général u_n converge et en donner sa somme.

6. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 2$ on a :

$$\ln(n+1) - \ln(n) = \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n}$$

7. En déduire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n+1}$ diverge. [1]

Exercice IV : Etude de fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + x$.

On notera $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité graphique 2cm. On pourra utiliser la feuille de papier millimétrée fournie. On pourra compléter progressivement le graphique avec les résultats d'étude obtenus en vue d'obtenir un tracé de l'allure de $\mathcal{C}$.

1. (a) Calculer la dérivée f' de f puis calculer la dérivée f'' de f'.
   (b) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = \dfrac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$
   (c) Etudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$ et en déduire que $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion unique noté I dont on précisera les coordonnées.
   (d) Déterminer le sens de variations de f' et préciser la valeur de $f'(0)$.
   (e) En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Déterminer, pour $t \in \mathbb{R}$, une expression de $\displaystyle\int_0^t \frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x$.
   (b) En remarquant que, pour tout $X > 0$ on a $\dfrac{1}{1+X} = 1 - \dfrac{X}{1+X}$ déterminer en fonction de $t \in \mathbb{R}$ une expression de :

$$\varphi(t) = \int_0^t f(x)\mathrm{d}x = \int_0^t \left(\frac{1}{1+e^x} + x\right)\mathrm{d}x$$

   (c) Vérifier que $\varphi(1) = \dfrac{3}{2} + \ln\left(\dfrac{2}{e+1}\right)$
3. (a) Calculer les limites de f en $+\infty$ ainsi qu'en $-\infty$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x)$ ainsi que $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - (x+1))$.
   (c) On considère la droite (D) : $y = x$ ainsi que (D') : $y = x+1$. Que pourrait-on dire des droites (D) et (D') pour $\mathcal{C}$ au regard des résultats qui précèdent ?
4. On note A le point de coordonnées $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. Déterminer une équation de la tangente notée $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ en le point A.
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique réelle notée α puis vérifier que $-1 \leq \alpha \leq 0$
6. Recopier puis compléter le script Python suivant pour qu'il détermine une valeur approchée de α à 10^{-8} près par la méthode de dichotomie :

1. NON ! vous ne pouvez pas juster dire : “la série harmonique diverge, je le sais bien"

```
def f(x):
        y....................
        return y
a=-1
b=0
while ...................:
        c=(a+b)/2
        if f(c)*f(a) <0:
                b=...............
        else:
                .................
print(..................)
```

7. (a) Sur la feuille de papier millimétrée, tracer l'allure de $\mathcal{C}$, les droites (D), (D') et $\mathcal{T}$.
   (b) Placer les points A et I.
   (c) Hachurer la région du plan correspondant à la valeur de $\varphi(1)$