En utilisant la décroissance des $(N_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$

Ainsi $\mathbb{P}(N_k) = \frac{1}{k!}$

3/ $\lim_{k\to+\infty} k! = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} P_n = 0$

Ceci peut s'interpréter par le fait que ce joueur ne parcourera pas une infinité de niveaux de façon presque sûre : à un moment, un dernier niveau $N \geq 1$ sera atteint sans que le niveau $N+1$ ne le soit.

Cas $K = B$

Exercice I

$x+1 \neq 0 \iff x \neq -1$ et ainsi $\frac{x}{x+1}$ est bien définie et continue pour $x \in [0,1]$ (quotient)

On calcule $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1}\right)dx$

$= \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$ (linéarité)

$= 1 - [\ln|x+1|]_0^1 = 1 - \ln 2$

On procède au calcul de I_2 par IPP :

On pose $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = e^{x-1}$ avec $v(x) = e^{x-1}$

qui sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ avec :

$I_2 = \int_0^2 x e^{x-1}\,dx = [x e^{x-1}]_0^2 - \int_0^2 e^{x-1}\,dx$

$= (2e^{2-1} - 0) - [e^{x-1}]_0^2 = 2e - e + e^{-1}$

$= e + \frac{1}{e}$

Exercice II

```
N = 500
B = np.zeros([N])
for k in range (N):
    B[k] = rd.random()
    B[k] = floor (B[k] * 8) + 1
Hst = plt.hist (B, range = (0,8), bins = 8)
plt.show()
```

Exercice III

1/ $\overline{N_k}$ correspond au fait de tirer une boule blanche au $k^{ième}$ tirage. Or, ceci requiert d'avoir tiré une boule blanche à chaque tirage précédent.

Il y a initialement 2 boules dans l'urne donc il y en aura $k+2$ après la réalisation de $\overline{N_k}$. En considérant l'équiprobabilité de tirages des boules

On a donc $\mathbb{P}_{\overline{N_k}}(N_{k+1}) = \frac{1}{2+k}$ et on a $\mathbb{P}(N_1) = \frac{1}{2}$

2/ Comme remarqué en 1/ on a $\overline{N_{k-1}} = \overline{N_{k-1}} \cap \overline{N_{k-2}} \cap \dots \cap \overline{N_1}$

Par la formule des probabilités composées on écrit :

$\mathbb{P}(N_k) = \mathbb{P}(\overline{N_1} \cap \overline{N_2} \cap \dots \cap \overline{N_{k-1}} \cap N_k) = \mathbb{P}(\overline{N_1})\,\mathbb{P}_{\overline{N_1}}(\overline{N_2}) \dots \mathbb{P}_{\overline{N_{k-1}}}(N_k)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \dots \times \frac{k-1}{k} \times \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$

pour $k \geq 2$ et $\mathbb{P}(N_1) = \frac{1}{2} = \frac{1}{1(1+1)}$ valide la formule

3/ On a $\lim_{k\to+\infty} k(k+1) = \lim_{k\to+\infty} k^2 = +\infty$ (règle des monômes)

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{+\infty} = 0$ (calcul de $\overline{\mathbb{R}}$)

Ceci signifie que, de façon presque sûre, l'expérience s'arrêtera au bout d'un nombre fini d'étape puisque la probabilité de prolonger les tirages à l'infini est nulle.

Lycée Turgot

Corrigé $I_5(K)$

ECT-2

2024 / 2025

Cas K = A

Exercice I

$x^2+1>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et ainsi :

$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$ est bien définie sur $[0;1]$

On remarque que si $u(x) = x^2+1$ alors $u'(x) = 2x$

Ainsi $I_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$ (linéarité de $\int$)

$= \frac{1}{2}\left[\ln|x^2+1|\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\ln(2)-\ln(1)\right)$

$= \frac{1}{2}\ln 2$

on va calculer I_2 par IPP en posant :

$\begin{cases} a(x) = 2x \Rightarrow a'(x) = 2 \\ b'(x) = e^{3-2x} \text{ avec } b(x) = -\frac{1}{2}e^{3-2x} \end{cases}$

Les fonctions a et b étant bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ on peut écrire :

$I_2 = \left[-xe^{3-2x}\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} e^{3-2x}\,dx$ (linéarité)

$= \left(-e^{3-2} + (-1)e^{3+2}\right) + \left[-\frac{1}{2}e^{3-2x}\right]_{-1}^{1}$

$= -e - e^5 + \left(-\frac{1}{2}e^{3-2} + \frac{1}{2}e^5\right)$

$= -\frac{3}{2}e - \frac{9}{2}e^5$

Exercice II

```
N = 1000
A = np.zeros([N])
for k in range(N):
    A[k] = rd.random()
    A[k] = floor(A[k]) * 12) + 1
Hist = plt.hist(A, range = (0,12), bins = 12)
plt.show()
```

Exercice III

1°/ Le jeu débute au niveau 1 donc la probabilité de passer au niveau $2 = 1+1$ est $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

On peut écrire $P(N_3) = P(N_2)P_{N_2}(N_3)$.

L'énoncé se traduit par $P_{N_k}(N_{k+1}) = \frac{1}{k+1}$

Soit $P(N_3) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

2°/ On observe que $(N_k)_{k\geq 1}$ est décroissante au sens de l'inclusion. D'où ; pour $k\geq 3$:

$P(N_k) = P(N_1\cap N_2\cap\dots\cap N_k)$

$= P(N_1)P_{N_1}(N_2)P_{N_1\cap N_2}(N_3)\cdots P_{N_1\cap\dots\cap N_{k-1}}(N_k)$

par la formule des probabilités composées.

Ainsi $P(N_k) = P(N_1)P_{N_1}(N_2)P_{N_2}(N_3)\cdots P_{N_{k-1}}(N_k)$

$= 1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\dots\times\frac{1}{k}$