Concours Blanc C_2

Durée : quatre heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

Exercice I : Des matrices qui peuvent

On dit d'une matrice M qu'elle est *idempotente* lorsqu'elle est carrée et qu'elle vérifie $M^2 = M$. Cette notion va être étudiée au cours de ce problème et aucune autre connaissance n'est requise.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on notera I_n la matrice identité, carrée d'ordre n, ainsi que O_n la matrice nulle, carrée d'ordre n.

Partie 1 : Exemples

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ donné. Vérifier que les matrices identité et nulles, carrées d'ordre n, sont idempotentes.
2. En détaillant bien vos calculs, démontrer que M définie par : $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est bien idempotente.
3. La matrice $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle idempotente ?
4. Parmi les matrices qui suivent, donner (sans justification) les matrices idempotentes :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie 2 : Quelques propriétés générales

On considère un entier naturel $n \geq 1$ et une matrice M carrée d'ordre n idempotente.

1. Vérifier que $M^2 - M = O_n$
2. Soit un réel λ donné. On considère l'équation (E_λ) : $MX = \lambda X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, matrice colonne.
   (a) Vérifier que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice colonne $0_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ est solution de (E_λ)
   (b) Démontrer que, si X est solution de (E_λ) alors $\lambda X = \lambda^2 X$
   (c) En déduire que, si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$, le système linéaire (S_λ) associé à l'équation matricielle (E_λ) est de Cramer.
   On pourra raisonner par l'absurde
3. Démontrer que la matrice $N = I_n - M$ est aussi idempotente.

Partie 3 : Programme de vérification

On considère le programme écrit en langage Python suivant :

```
from math import*
import numpy as np

def idemtest(M):
    S=np.shape(M)
    n=S[1]
    p=1
    MM=np.dot(M,M)
    t=0
    for l in range(n):
        for k in range(n):
            if MM[l,k]==M[l,k]:
                t=t+1
    return(t)
```

On rappelle que la commande `np.shape(M)` renvoie, sous la forme d'une liste à deux éléments, les dimensions de la matrice `M` (nombre de lignes, puis nombre de colonnes).

1. Quel est le rôle de la fonction `idemtest` encodée ?
2. A la console, on tape la suite de commandes :

```
>>> M=np.array([[0,1],[0,0])
>>> idemtest(M)
```

   Quel résultat lira-t-on en sortie ?
3. Reprendre le programme proposé puis le modifier pour que, à l'appel de la fonction `idemtest` sur une matrice `M` donnée en entrée, la fonction indique à l'utilisateur si `M` est idempotente ou non.
   On précisera bien la nature de la sortie et la façon pour l'utilisateur de la lire.

Application à l'étude des puissances d'une matrice

On définit pour cette partie les matrices $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = I_2 - C$

1. Montrer que C et D sont idempotentes. Calculer DC et CD.
2. On pose $B = 2C + D$.
   (a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $B^n = 2^n C + D$
   (b) En déduire l'écriture excplicite de B^n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
3. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$
   (a) Calculer P^2. En déduire que P est inversible et déterminer l'inverse P^{-1} de P.
   (b) Calculer $P^{-1}AP$. Qu'observez-vous ?
   (c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $A^n = PB^nP^{-1}$
   (d) Déterminer une expression explicite de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice II : Un jeu bicolore

Une urne contient des boules rouges et des boules vertes.
- 20% de ces boules sont rouges et portent le numéro 1.
- Les autres boules portent le numéro 2, et parmi elles, 10% sont rouges et les autres sont vertes.

Préliminaires :

On tire une de ces boules au hasard.
1. Quelle est la probabilité que cette boule soit rouge et porte le numéro 1 ?
2. Montrer que la probabilité que cette boule porte le numéro 2 est égale à 0,8.
3. Montrer que la probabilité que cette boule soit rouge est égale à 0,28

Première expérience

Dans cette partie du problème, on considère que l'on procède à des tirages successifs *avec remise*.
1. On note X le nombre de boules extraites lorsque, pour la première fois, on voit une boule rouge.
   Reconnaître, en justifiant, la loi de X. En préciser l'espérance et la variance.
2. On note T le nombre de boules portant le numéro 2 tirées lorsque, pour la première fois, on constate qu'une boule portant le numéro 1 est extraite.
   (a) Expliciter $T(\Omega)$.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\mathbb{P}[T = n] = \dfrac{4^n}{5^{n+1}}$.
   (c) Démontrer que $T + 1$ a une espérance et que cette espérance vaut $\mathbb{E}[T + 1] = 5$.
   (d) En déduire alors que T admet aussi une espérance puis la déterminer.
   (e) La variable aléatoire T admet-elle une variance ? Justifier et préciser sa valeur le cas échéant.
3. Les variables aléatoires T et X sont-elles indépendantes ?

Seconde expérience

On considère le jeu dont la règle est la suivante : Un joueur tire une boule au hasard de l'urne décrite au début de l'exercice.
- Si la boule tirée est rouge et porte le numéro 1, ce joueur gagne un euro.
- Si la boule tirée est rouge et porte le numéro 2, ce joueur gagne deux euros.
- Si la boule tirée est verte, ce joueur perd un euro.

On note G la variable aléatoire égale au gain de ce joueur.
1. (a) Déterminer la loi de G.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de G.
2. Un joueur tire n boules ($n \geq 1$) de cette urne, au hasard, avec remise de la boule tirée.
   On note respectivement R_n, U_n, V_n et D_n les variables aléatoires égales respectivement au nombre de boules rouges obtenues, au nombre de boules portant le numéro 1 (un) obtenues, au nombre de boules vertes obtenues et enfin, au nombre de boules portant le numéro 2 (deux) obtenues.
   (a) Donner les lois respectives de R_n, U_n, V_n et D_n et en donner leurs espérances respectives en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Que vaut $R_n + V_n$? Les variables aléatoires R_n et V_n sont-elles indépendantes ?
   Déterminer la covariance de R_n et V_n en fonction de n.
   (c) Que vaut $U_n + D_n$? Les variables aléatoires U_n et D_n sont-elles indépendantes ?
   Déterminer la covariance de U_n et D_n en fonction de n.
   (d) On note G_n le total de gains cumulés par un joueur qui joue n parties consécutives du jeu décrit initialement.
   Etablir la relation $G_n = U_n + 2D_n - 3V_n$ puis calculer l'espérance $\mathbb{E}[G_n]$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

3. *Simulations du jeu :* On considère le programme python (incomplet) suivant :

```
from math import*
import numpy.random as rd

n=int(input("nombre de parties"))
G=0
for ..................
    A=rd.random()
    if A<=0.2:
        G=............
    else:
        A=(A-0.2)/0.8
        if A<=........
            ..........
        else:
            ...............
print("votre gain total : ", ..........)
```

(a) En supposant que $\texttt{A} > 0,2$ est effectivement vérifié, que cherche-t-on à obtenir au moyen de l'instruction $\texttt{A} = (\texttt{A} - 0.2)/0.8$?

(b) Recopier puis compléter le programme proposé pour qu'il simule n parties consécutives du jeu proposé et renvoie le gain total (ou la perte) obtenu.

(c) Proposez deux lignes supplémentaires pour obtenir le gain moyen résultant des parties simulées.

(d) Un utilisateur exécute le programme et entre $\texttt{n} = 1200$. Il a obtenu -417 en retour.
Ce résultat vous apparait-il cohérent avec l'étude effectuée ?

Exercice III : suites et intégrales

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \int_0^1 (\ln(1+t))^n \, \mathrm{d}t$$

1. On note g la fonction à valeurs réelles telle que : $\forall t \geq 0 \quad g(t) = (1+t)\ln(1+t) - t$
   (a) On note g' la fonction dérivée de g. Calculer $g'(t)$ pour $t \geq 0$.
   (b) En déduire la valeur de u_1
2. Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ et telle que $f(t) = \ln(1+t)$.
   (a) Calculer, pour $t \in [0;1]$, $f'(t)$ puis $f''(t)$.
   (b) Etudier les variations de f sur $[0;1]$ et tracer la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
   (c) Montrer que f est concave sur $[0;1]$.
3. (a) Justifier, pour tout réel t de $[0;1]$, l'encadrement suivant : $0 \leq \ln(1+t) \leq \ln 2$
   (b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $0 \leq u_n \leq (\ln 2)^n$
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et a pour limite 0
4. (a) A l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout entier naturel n la relation suivante :
   $$u_{n+1} = 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)u_n$$
   Indication : La fonction $t \mapsto t+1$ est (aussi) primitive de $t \mapsto 1$
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n on a : $(n+1)u_n \leq 2(\ln 2)^{n+1}$
   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (d) Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $(n+2)u_n \geq 2(\ln 2)^{n+1}$
   (e) Déterminer enfin $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{nu_n}{2(\ln 2)^{n+1}}$

Exercice IV : Couples de VAR finies

Une urne contient initialement deux boules rouges et une boule bleue. Un jeu consiste à répéter la séquence suivante :

- Tirer une boule au hasard dans l'urne ;
- Si la boule tirée est rouge, la retirer et la remplacer par une boule bleue.
- Si la boule tirée est bleue, la retirer (et c'est tout).

On définit, pour tout entier naturel k, les événements :

— B_k : "obtenir une boule bleue lors de la k-ème séquence"

— R_k : "obtenir une boule rouge lors de la k-ème séquence"

1. (a) Calculer $\mathbb{P}(B_1)$ et $\mathbb{P}(R_1)$
   (b) En utilisant la formule des probabilités totales, calculer $\mathbb{P}(B_2)$ et $\mathbb{P}(R_2)$
   (c) On constate, à l'issue de la deuxième séquence que la boule tirée est bleue. Quelle est la probabilité que le premier tirage ait amené une boule rouge ?
2. On note Y_1 la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne à l'issue de la première séquence de jeu.
   (a) Déterminer $Y_1(\Omega)$, ensemble des valeurs prises par Y_1.
   (b) Calculer $\mathbb{P}[Y_1 = 1]$ ainsi que $\mathbb{P}[Y_1 = 2]$. On pourra utiliser la question 1.a)
   (c) Déterminer l'espérance de Y_1
3. On note Y_2 la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne à l'issue de la deuxième séquence de jeu.
   (a) Justifier que $Y_2(\Omega) = \{0\ ;\ 1\}$.
   (b) Etablir que $\mathbb{P}([Y_1 = 2] \cap [Y_2 = 1]) = \dfrac{1}{3}$
   (c) Justifier avec précision que $\mathbb{P}([Y_1 = 1] \cap [Y_2 = 1]) = \dfrac{4}{9}$
   (d) Déterminer complètement la loi conjointe du couple $(Y_1; Y_2)$. On pourra résumer à l'aide d'un tableau.
4. (a) Déduire de la loi conjointe du couple $(Y_1; Y_2)$ la loi (marginale) de Y_2 puis en déterminer l'espérance $\mathbb{E}[Y_2]$.
   (b) Calculer la valeur de $\mathbb{E}[Y_1 Y_2]$
   (c) Montrer que la covariance de $(Y_1; Y_2)$ est égale à $\dfrac{2}{27}$. Les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ?
5. *Programmation Python* : Dans le programme suivant, la variable `r` représente le nombre de boules rouges dans l'urne à un instant donné.
   (a) Recopier puis compléter ce programme afin qu'il simule les deux premières séquences de ce jeu.
   (b) Que représente la variable `b` dans votre programme complété ?
   (c) On exécute ce programme : à quelle variable aléatoire de l'exercice le nombre affiché en retour correspondra-t-il alors ?

```
from math import*
import numpy as np
import random.numpy as rd
r= 2
b= ........................
for k in range(2):
        if rd.random()<r/(r+b):
                r=r-1
                ....................
    else :
                ....................
print(r)
```