.

Variables Aléatoires à densité

Exercice $\boxed{1}$ On considère la fonction f suivante :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad 1 < x \end{cases} \end{array}.$$

1. Démontrer que f est positive sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est continue sur $]-\infty; 1[$ ainsi que sur $]1; +\infty[$.
3. f est-elle continue en $x = 1$? justifier.
4. Esquisser l'allure de la courbe représentative de f en repère orthonormé.
5. Etablir que f est une densité de probabilités.
6. Soit X une variable aléatoire de densité f.
   (a) Déterminer les valeurs de $\mathbb{P}[X \leq 0]$, $\mathbb{P}[X \leq 1]$ ainsi que de $\mathbb{P}[X > 1]$.
   (b) Déterminer de façon similaire $\mathbb{P}[X \leq 2]$ et $\mathbb{P}[X \leq 3]$.
   (c) En déduire $\mathbb{P}[X \in]2, 3]]$. Que vaut $\mathbb{P}[X \in [2, 3]]$? Interpréter le résultat précédent graphiquement.
   (d) Calculer enfin $\mathbb{P}[-1 \leq X \leq 5]$

Exercice $\boxed{2}$ On considère la fonction g suivante :

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{2}{x^3} & \text{si} \quad 1 < x \end{cases} \end{array}.$$

1. Démontrer que g est positive sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que g est continue sur $]-\infty; 1[$ ainsi que sur $]1; +\infty[$.
3. g est-elle continue en $x = 1$? justifier.
4. Esquisser l'allure de la courbe représentative de g en repère orthonormé.
5. Etablir que g est une densité de probabilités.
6. Soit Y une variable aléatoire de densité f.
   (a) Déterminer les valeurs de $\mathbb{P}[Y \leq 0]$, $\mathbb{P}[Y \leq 1]$ ainsi que de $\mathbb{P}[Y > 1]$.
   (b) Déterminer de façon similaire $\mathbb{P}[Y \leq 3]$ et $\mathbb{P}[Y \leq 4]$.
   (c) En déduire $\mathbb{P}[Y \in]3, 4]]$. Que vaut $\mathbb{P}[Y \in [3, 4]]$? Interpréter le résultat précédent graphiquement.
   (d) Calculer enfin $\mathbb{P}[-1 \leq Y \leq 5]$

Exercice $\boxed{3}$ On considère une variable aléatoire X dont on admettre que la fonction de répartition F est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = 1 - \frac{1}{1 + e^x}$$

1. On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{(1 + e^x)^2}$ avec $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}$ et paire.
   (b) Démontrer que f est une densité de probabilités.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$ donné, déterminer une expression explicite de $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.
3. En déduire que X est une variable aléatoire à densité.
4. Calculer les valeurs de $\mathbb{P}[X \leq 0]$ ainsi que $\mathbb{P}[0 \leq X \leq 3]$.

Exercice $\boxed{4}$ On considère une variable aléatoire X dont on admettra que la fonction de répartition G est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad G(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

1. On considère la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$ avec $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Vérifier que g est paire et continue sur $\mathbb{R}$
   (b) Démontrer que g est une densité de probabilités.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$ donné, déterminer une expression explicite de $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} g(t)\mathrm{d}t$.
3. En déduire que X est une variable aléatoire à densité.
4. Calculer les valeurs de $\mathbb{P}[X \geq 0]$ ainsi que $\mathbb{P}[-2 \leq X \leq 0]$.

Exercice $\boxed{5}$ On définit une fonction F par :

$$F: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{t^2-4}{t^2+5} & \text{si} & t \geq 2 \\ 0 & \text{si} & t < 2 \end{array} \right. \end{array}.$$

1. Vérifier que F est continue en $t = 2$ et en déduire que F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Etablir que F est dérivable sur $]2; +\infty[$ puis calculer $F'(t)$ pour $t > 2$.
3. Que vaut $F'(t)$ pour $t < 2$?
4. On note f la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} F'(t) & \text{si } t > 2 \\ 0 & \text{si } t \leq 2 \end{cases}$
   (a) Justifier que f est une densité de probabilités.
   (b) Démontrer que, pour tout réel x, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(x)\mathrm{d}x = F(t)$.
   (c) En déduire que, si X est une variable aléatoire de fonction de répartition F, alors X est à densité.
   on désignera ainsi par X une telle variable aléatoire dans la suite.
5. Calculer $\mathbb{P}[X \in [0; a]]$ en fonction du réel $a \geq 0$.

Exercice $\boxed{6}$ On définit une fonction G par :

$$G: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} 1-\frac{1}{t^2-3} & \text{si} & t \geq 2 \\ 0 & \text{si} & t < 2 \end{array} \right. \end{array}.$$

1. Vérifier que G est continue en $t = 2$ et en déduire que G est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Etablir que G est dérivable sur $]2; +\infty[$ puis calculer $G'(t)$ pour $t > 2$.
3. Que vaut $G'(t)$ pour $t < 2$?
4. On note g la fonction définie par $g(t) = \begin{cases} G'(t) & \text{si } t > 2 \\ 0 & \text{si } t \leq 2 \end{cases}$
   (a) Justifier que g est une densité de probabilités.

(b) Démontrer que, pour tout réel x, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} g(x)\mathrm{d}x = G(t)$.

(c) En déduire que, si X est une variable aléatoire de fonction de répartition G, alors X est à densité.
on désignera ainsi par X une telle variable aléatoire dans la suite.

5. Calculer $\mathbb{P}[X \in [0;a]]$ en fonction du réel $a \geq 0$.

Exercice $\boxed{7}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on définit f_n sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x)^n & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_n est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a F_n minorée par 0 et majorée par 1.
On admet que, pour chaque n entier naturel non nul, F_n est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X_n
3. Démontrer que X_n est une variable aléatoire à densité pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice $\boxed{8}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on définit f_n fonction sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} n(1-t)^{n-1} & \text{si } t \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on observera que, pour $n = 1$, la fonction f_n est constante et vaut 1 sur $[0;1]$.

1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $]0;1[$.
2. Calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
3. En déduire que f_n est une densité de probabilités pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire de densité f_n dans la suite.
4. Déterminer la fonction de répartition de X_n, notée F_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice $\boxed{9}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ On considère une variable aléatoire X dont une densité h est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = \begin{cases} \frac{8}{9} - \frac{2}{9}x & \text{si } x \in [1;4] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que h est bien une densité de probabilités.
2. Démontrer que X admet une espérance $\mathbb{E}[X]$ et la calculer.
3. On pose $Y = X^2$.
   (a) Déterminer, pour $x \in [1;16]$, la valeur de $\mathbb{P}[1 \leq Y \leq x]$
   Indication : On commencera par établir que $\mathbb{P}[1 \leq Y \leq x] = \mathbb{P}[1 \leq X \leq \sqrt{x}]$
   (b) Vérifier que $\mathbb{P}[Y \leq x] = 0$ si $x \leq 1$.
   (c) Exprimer la fonction de répartition notée G de Y.
   (d) Vérifier qu'une densité de Y peut être décrite par la fonction $g(x) = \dfrac{4}{9\sqrt{x}} - \dfrac{1}{9}$ si $x \in [1;16]$, et $g(x) = 0$ sinon.
   (e) Vérifier que Y admet une espérance $\mathbb{E}[Y]$ qui vaut $\dfrac{9}{2}$.
4. Déterminer, finalement, la valeur de variance de X notée $\mathbb{V}[X]$ et en déduire son écart-type $\sigma(X)$.

Exercice $\boxed{10}$ On considère une variable aléatoire X dont une densité f est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2}x^4 & \text{si } x \in [-1;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilités.
2. Démontrer que X admet une espérance $\mathbb{E}[X]$ et la calculer.
3. On pose $Y = X^2$.
   (a) Déterminer, pour $x \in [0;1]$, la valeur de $\mathbb{P}[0 \leq Y \leq x]$
   Indication : On remarquera que $\mathbb{P}[0 \leq Y \leq x] = \mathbb{P}[-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}]$
   (b) Vérifier que $\mathbb{P}[Y \leq x] = 0$ si $x \leq 0$.
   (c) Exprimer la fonction de répartition notée G de Y.
   (d) En déduire une densité de Y notée g.
   (e) Vérifier que Y admet une espérance pouvant être exprimée par $\mathbb{E}[Y] = \displaystyle\int_0^1 \frac{5}{2}x^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$. En donner la valeur.
4. Déterminer, finalement, la valeur de variance de X notée $\mathbb{V}[X]$ et en déduire son écart-type $\sigma(X)$.

Exercice $\boxed{11}$ *Première loi de Laplace*

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que f est paire et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est une densité de probabilités.
   On notera L une variable aléatoire de densité f dans la suite.
3. Pour $x \in \mathbb{R}_+$ donné, calculer $\displaystyle\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$.
4. En déduire que L admet une espérance $\mathbb{E}[L]$ et la calculer.
5. Déterminer une densité de la variable aléatoire $X = 2L - 1$ et en déduire $\mathbb{E}[X]$.

Cette loi particulière n'est pas à connaître

Exercice $\boxed{12}$ *Loi logistique standard*

On reprend la fonction G de l'exercice $\boxed{4}$: $G(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ et on note X une variable aléatoire dont G est une fonction de répartition.

1. Pourquoi X est à densité ? Rappeler alors une densité de X. On notera g dans la suite une telle densité.
2. Justifier que l'on peut choisir $g(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$ et $G(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Démontrer que $x \mapsto \ln(1+e^x)$ est une primitive de G sur $\mathbb{R}$.
4. Soit x un réel donné. A l'aide d'une intégration par parties, exprimer $\displaystyle\int_0^x tg(t)\,\mathrm{d}t$.
5. En déduire que X admet une espérance et la calculer.

Cette loi particulière n'est pas à connaître

Exercice $\boxed{13}$ On reprend la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ pour $x \in \mathbb{R}$ de l'exercice $\boxed{9}$.

On définit $Y = X^2$ une nouvelle variable aléatoire. Le but de l'exercice est de caractériser la loi de Y.

1. Justifier que $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$
2. Soit $a > 0$ donné. Déterminer $\mathbb{P}\left[-\sqrt{a} \leq X \leq \sqrt{a}\right]$ en fonction de a.
3. En déduire la valeur de $\mathbb{P}\left[Y \leq a\right]$ en fonction de $a \geq 0$
4. Que vaut $\mathbb{P}\left[Y \leq a\right]$ si $a < 0$?
5. En déduire la fonction de répartition de Y. On la notera F_Y dans la suite.
6. On définit la fonction f_Y par $f_Y(x) = F_Y'(x)$ si $x > 0$ et $f_Y(x) = 0$ sinon.
   (a) Déterminer une expression de $f_Y(x)$ pour $x > 0$.
   (b) Que vaut $f_Y(x)$ si $x \leq 0$?
   (c) Expliciter $xf_Y(x)$ pour $x > 0$ et en calculer la limite lorsque x tend vers 0^+.