.

Lois usuelles à densité

Nous proposons de résumer les lois usuelles au moyen de cartes d'identité des lois à densité

Lois finies

Loi Uniforme (continue)

Utilisation : Situation d'équiprobabilité générant des nombres réels de a à b (comme simulation informatique).

Notation : On écrit $\mathcal{U}[a\ ;\ b]$ avec $a < b$ réels.

Ensemble de valeurs Si X suit une loi $\mathcal{U}[a\ ;\ b]$ alors $X(\Omega) = [a\ ;\ b\ ]$.

Densité de probabilité : Les paramètres a et b étant des réels avec $a < b$ on a $\boxed{f_X(t) = \dfrac{1}{b-a}}$ si $t \in [a;b]$ (et 0 sinon).

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si} \quad a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Loi de probabilité : Les paramètres a et b étant des réels avec $a < b$ on a :

$$\forall (c;d) \in [a;b]^2 \quad c \leq d \quad \Longrightarrow \mathbb{P}[c \leq X \leq d] = \frac{d-c}{b-a}$$

Fonction de répartition : La fonction de répartition peut être donnée par $\boxed{F_X(t) = \dfrac{t-a}{b-a}}$ pour $t \in [a;b]$.

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad F_X(t) = \begin{cases} \dfrac{t-a}{b-a} & \text{si} \quad a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Indicateurs : Le couple espérance-variance de $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a\ ;\ b]$ est donné par :
- $\mathbb{E}[X] = \dfrac{b+a}{2}$
- $\mathbb{V}[X] = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Attendu : Savoir retrouver une loi uniforme $\mathcal{U}[a\ ;\ b]$ avec $a < b$ entiers, à partir de la connaissance particulière de $\mathcal{U}[0\ ;\ 1]$, au moyen de la transformation :

$$X = (b-a)U + a$$

avec $U \hookrightarrow \mathcal{U}[0\ ;\ 1]$. Les valeurs a et b sont assimilables aux variables certaines $a\mathbb{1}$ et $b\mathbb{1}$ respectivement.

Loi Exponentielle

Utilisation : Durée de vie sans vieillissement d'un machine, d'un système.
Notation : On écrit $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ paramètre (représente l'inverse de la durée de vie moyenne).

Ensemble de valeurs Si X suit une loi $\mathcal{E}(\lambda)$ alors $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$.

Densité de probabilité : Le paramètre λ étant un réel strictement positif on a $\boxed{f_X(t)\lambda e^{-\lambda t}}$ (et 0 sinon)

$$f_X : t \mapsto \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Loi de probabilité : Avec, de plus, les paramètres a et b réels vérifiant $a < b$ on a :

$$\forall (a;b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \;\; a \leq b \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}[a \leq X \leq b] = e^{-a\lambda} - e^{-b\lambda}$$

Fonction de répartition : La fonction de répartition peut être donnée par $\boxed{F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}}$ pour $t \geq 0$ (et 0 sinon).

$$F_X : t \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Indicateurs : Le couple espérance-variance de $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ est donné par :
- $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$
- $\mathbb{V}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

Loi Normale centrée-réduite

Utilisation : Les énoncés doivent être clairs dans son utilisation.
Notation : On écrit $\mathcal{N}(0;1)$.
Ensemble de valeurs Si X suit une loi $\mathcal{N}(0;1)$ alors $X(\Omega) = \mathbb{R}$.

Densité de probabilité : La fonction de Gauss-Laplace est notée φ et constitue une fonction de référence :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$$

Fonction de répartition : On peut noter la fonction de répartition Φ qui est une primitive de φ vérifiant $\lim\limits_{x \to -\infty} \Phi(x) = 0$.

On ne cherchera pas à l'expliciter formellement ! Une écriture en $\Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\mathrm{d}t$ suffit.

Indicateurs : Le couple espérance-variance de $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ est donné par :
- $\mathbb{E}[X] = 0$
- $\mathbb{V}[X] = 1$

Lois Normales (générales)

Utilisation : Les énoncés doivent être clairs dans son utilisation.
Notation : On écrit $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$.
Ensemble de valeurs Si X suit une loi $\mathcal{N}(0;1)$ alors $X(\Omega) = \mathbb{R}$.

Densité de probabilité : La fonction définie par : $\forall t \in \mathbb{R} \quad f_{\mu,\sigma}(t) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2/2}$

Fonction de répartition : On ne cherchera pas à l'expliciter formellement ! Une écriture en $F_{\mu,\sigma}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \varphi_{\mu,\sigma}(t)\mathrm{d}t$ suffit.

Indicateurs : Le couple espérance-variance de $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ est donné par :
- $\mathbb{E}[X] = \mu$
- $\mathbb{V}[X] = \sigma^2$

Attendu : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ si, et seulement si, $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi normale centrée-réduite.
Etudier la loi $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ à partir de cette transformation est exigible.